Sea A un anillo. Un elemento $z \in A$ es nilpotente si existe un entero positivo n tal que $z^n = 0$.

Parte a

Probar que si A es un dominio, entonces el único elemento nilpotente es 0.
Consideremos $\varphi\ n :\equiv z^{n+1} = 0 \Rightarrow z = 0$ para hacer inducción.
$\varphi\ 0$ es trivial.

Se tiene
$$\dfrac{\dfrac{}{z = 0 \vdash z = 0} \qquad \dfrac{\dfrac{}{z^{n+1} = 0 \vdash z^{n+1} = 0} \qquad \dfrac{}{z = 0 \vdash z^{n+1} = 0}}{z^{n+2} = 0 \vdash z^{n+1} = 0}\ (A \text{ es un dominio})}{z^{n+1} = 0 \Rightarrow z = 0 \vdash z^{n+2} = 0 \Rightarrow z = 0}$$

Como A es un dominio, $z^{n+2} = 0$ sii o bien $z^{n+1} = 0$ o bien $z = 0$.

Parte b

Probar que $\mathbb{Z}_n$ contiene elementos nilpotentes no nulos si y solo si n es divisible por el cuadrado de un número primo.
Supongamos que $p^2 \mid n$. Es decir que $n = p^2 q$ para algún q. Luego, $(pq)^2 = p^2 q \cdot q = n \cdot q$.
Tenemos entonces que pq está estrictamente entre 0 y n, y al cuadrado vale 0 módulo n.

Supongamos ahora que tenemos z, k y q tales que $z^k = qn$, con $z < n$.
Por absurdo, consideremos que ningún primo al cuadrado divide a n. Es decir que para cierto I_n, $n = \prod_{i \in I_n} p_i$, siendo p_i el i-ésimo primo.
Descomponiendo z, tenemos un I_z tal que $\left(\prod_{i \in I_z} p_i^{k_i}\right)^k = q \prod_{i \in I_n} p_i$, y se tiene que $I_n \subseteq I_z$.
Entonces $z < n = \prod_{i \in I_n} p_i \leq \prod_{i \in I_z} p_i \leq \prod_{i \in I_z} p_i^{k_i} = z$, lo cual es absurdo.

Parte c

Sean x y y elementos nilpotentes de A. Probar que si A es conmutativo, entonces $x+y$ es nilpotente. Probar con un contraejemplo que este resultado no vale en general si A no es conmutativo.
Tomemos n y m tales que $x^n = y^m = 0$. Entonces $(x+y)^{n+m} = \sum_{i+j=n+m} \binom{n+m}{i} x^i y^j = 0$.
Notar que si $i \geq n$, $x^i = 0$, y si $i < n$, tenemos $m < j$ con lo que $y^j = 0$.

Como contraejemplo consideremos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Las primeras dos son nilpotentes y la segunda no.

Parte d

Sea $z \in A$ tal que $z^n = 0$. Probar que $1 - z$ es invertible, siendo $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.
Recordar que $\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} z^k = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$. Como $z^n = 0$ se tiene que $(1-z)\big(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\big) = 1$.