Texto publicado en el ANUARIO 2012 de la Facultad de Ciencias, Universidad de la República, pp. 195-201, Montevideo, Uruguay.

Morfología matemática y formas naturales

Según una clasificación esquemática y antigua las personas nacen platónicas o aristotélicas. El psicólogo y filósofo William James en su último libro "Problemas de la Filosofía, publicado póstumamente en 1911, escribe *"Al recorrer la historia de la metafísica nos damos cuenta enseguida de que dos actitudes espirituales bastante distintas se han ocupado con su guerrear. Llamémoslas la actitud racionalista y la actitud empirista. Dice al respecto el conocido aforismo de Coleridge que cada hombre nace o platónico o aristotélico. Al decir aristotélico quiere significar empirista; al decir platónico quiere significar racionalista (...)".* Cauto, James comenta luego que por cierto tanto Platón como Aristóteles eran racionalistas en el contexto de sus respectivos discursos filosóficos. Jorge Luis Borges expande esa reflexión de James mediante un texto que reiteró casi incambiado en varios de sus escritos. En su ensayo "El ruiseñor de Keats", Borges escribe: *"Observa Coleridge que todos los hombres nacen aristotélicos o platónicos. Los últimos sienten que las clases, los órdenes y los géneros son realidades; los primeros, que son generalizaciones; para éstos, el lenguaje no es otra cosa que un aproximativo juego de símbolos; para aquéllos es el mapa del universo. El platónico sabe que el universo es de algún modo un cosmos, un orden; ese orden, para el aristotélico, puede ser un error o una ficción de nuestro conocimiento parcial. A través de las latitudes y de las épocas, los dos antagonistas inmortales cambian de dialecto y de nombre: uno es Parménides, Platón, Spinoza, Kant, Francis Bradley; el otro, Heráclito, Aristóteles, Locke, Hume, William James."*

El nuevo logotipo de la Facultad de Ciencias nos remite de modo directo a los "biotipos" intelectuales descritos por James y Borges. Esa espiral que evoca una perfecta figura geométrica y a la vez maravillosas (aunque matemáticamente imperfectas) geometrías naturales, invita a evocar dos concepciones de la ciencia que coexisten, se fertilizan mutuamente, pero sin embargo quizá paradójicamente se oponen y a veces se eluden y que se relacionan con las descripciones de James y Borges transcriptas antes.

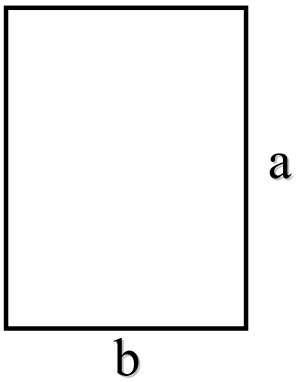
Este nuevo logotipo evoca una espiral logarítmica, curva de definición matemática precisa y de propiedades notables. También evoca múltiples curvas naturales presentes en objetos físicos, como las majestuosas galaxias espirales o las elegantes espirales del girasol. Pero remitiéndonos a la tipología previa, la espiral logarítmica pertenece al mundo platónico, único ámbito que permite la existencia de esa perfección inmaculada. En cambio, las espirales de los brazos de una galaxia o del centro de una flor pertenecen al mundo de lo empírico y nunca se sujetarán a la perfección total que poseen las espirales de la matemática. Estas espirales naturales, sea que aparezcan en los brazos de una galaxia, en los torbellinos de un fluido o en una estructura biológica, son creadas por procesos físicos que necesariamente provocan un cierto nivel de aleatoriedad que impide cualquier ajuste completo a las espirales perfectas de la matemática. Nos podemos legítimamente preguntar: ¿Los objetos "platónicos" de la matemática acaso no son objetos de la Naturaleza? Y la respuesta es claramente afirmativa: lo son, pero fueron traídos a la Naturaleza por el cerebro humano y sus construcciones culturales.

Asociado con algunas espirales logarítmicas está uno de los números más famosos de la matemática: el "número de oro" o "número áureo". Múltiples problemas de geometría o de álgebra conducen a este número que se suele representar mediante la letra griega φ ("fi"), y que está dado por la ecuación

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Este es un número irracional del que damos alguno de sus primeros decimales:

$$\varphi = 1{,}6180339887\cdots$$



La mitología de este número lo asocia a la apreciación estética de los marcos rectangulares. Ante un rectángulo como el del dibujo, se afirma que nuestro sentido de la armonía tiende a preferenciar rectángulos que satisfagan la llamada “relación áurea” entre los lados, que viene dada por la igualdad siguiente:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b} \quad .$$

Si hacemos la base b igual a la unidad, $b = 1$, esta relación áurea permite calcular el valor del lado a mediante la siguiente ecuación de segundo grado:

$$a^2 - a - 1 = 0 \ ,$$

cuya raíz positiva es

$$a = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = \varphi \ .$$

Este es uno de los modos de ver nacer el número áureo. Ahora, ¿es este rectángulo el más estético para la mayoría de los humanos? Este es un asunto que ha sido sometido a variados experimentos que no parecen haber dirimido el problema (el libro “Le Nombre d’Or” de M.

Cleyet-Michaud, Presses Universitaires de France, 1988, reporta experimentos y sus debates asociados). Sugerimos a los lectores interesados en esto, que con la ayuda de 10 a 20 personas realicen el experimento de pedir a los participantes que dibujen el rectángulo que les parezca más armónico, y que sobre esta población de rectángulos evalúen los cocientes a/b y realicen su propia estadística.

En su universo matemático, el número φ posee propiedades extraordinarias que lo hacen ampliamente merecedor de su prestigio. Veamos unos pocos ejemplos de esto. El que sea raíz de la ecuación de segundo grado producida por el rectángulo áureo, hace verdadera esta otra ecuación:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \qquad (1)$$

que implica

$$\varphi^2 = 1 + \varphi \qquad (2)$$

y también

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad . \qquad (3)$$

De esto salen varias propiedades notables. La ecuación (2) muestra una forma de reducir las potencias del número φ a representaciones de primer grado: por ejemplo

$$\varphi^3 = \varphi + \varphi^2 = \varphi + (1 + \varphi) = 1 + 2\varphi \ .$$

Por una razón que se hará evidente en las próximas líneas, mostremos algunas otras potencias del número áureo:

$$\varphi^4 = 2 + 3\varphi$$

$$\varphi^5 = 3 + 5\varphi$$

$$\varphi^6 = 5 + 8\varphi$$

$$\varphi^7 = 8 + 13\varphi$$

$$\varphi^8 = 13 + 21\varphi$$

La ecuación (3) es muy notable porque muestra que la inversa de φ comparte el mismo desarrollo decimal que φ:

$$\varphi = 1{,}6180339887\cdots \qquad \frac{1}{\varphi} = 0{,}6180339887\cdots$$

De la ecuación (2) sale

$$\varphi = \sqrt{1+\varphi} \quad ;$$

reintroduciendo bajo la raíz cuadrada la expresión previa, resulta

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}$$

e iterando continuamente este proceso se obtiene una sorprendente expresión de φ en la que sólo aparece el número 1:

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} \qquad .$$

Como último ejemplo, mostremos otra expresión que permite representar φ mediante sólo el número 1. Esta expresión es una fracción continua que surge de iterar la ecuación (3). En esta representación, también infinita, el número áureo queda de la forma siguiente:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} \quad .$$

Este número áureo tiene una íntima relación con la llamada "sucesión de Fibonacci" que es invocada en muchas situaciones biológicas. Para empezar, se dice que quien le da su nombre a la sucesión, Leonardo de Pisa o Leonardo Fibonacci, la encontró por el siglo XIII reflexionando sobre el crecimiento de poblaciones de conejos. La regla de generación de la sucesión es simple: comenzando por un par inicial de unos, que ofician de "semilla", los sucesivos términos de la sucesión surgen de sumar los precedentes. Esto da:

1, 1, 2, 3, 5. 8, 13, 21, 34, 55, etc.

En general, si F_n designa al término de la sucesión que está en la posición n, la ley de formación es

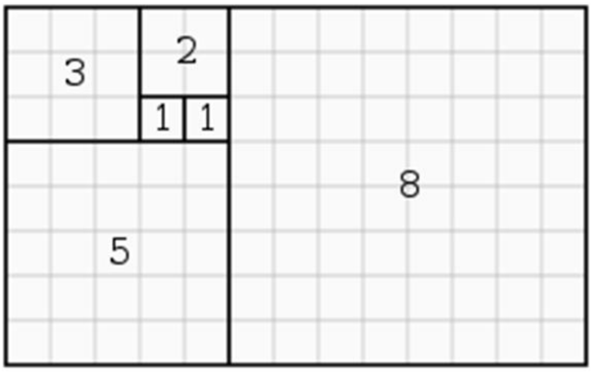
$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad .$$

Los sucesivos cocientes de la sucesión de Fibonacci se aproximan al número áureo cuando n tiende a infinito. Así, resulta que 21/13 = 1,615 , 34/21 = 1,619, 55/34 = 1,617 , etc. Se puede probar formalmente que

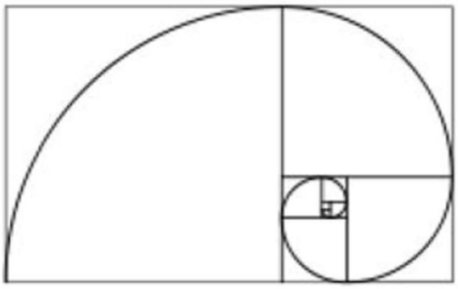
$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Por otra parte, notemos que las potencias crecientes del número φ mostradas más arriba generan, en cada uno de sus dos términos, los sucesivos valores de la sucesión de Fibonacci. Este es un resultado muy curioso e importante que reafirma la intrincada relación mutua entre esta sucesión y el número áureo. Por otra parte, los sucesivos pasos que conduce a la fracción continua que expresa φ también producen los sucesivos cocientes de los miembros de la sucesión de Fibonacci.

Las dos siguientes ilustraciones (extraídas del articulo de Wikipedia en http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number) muestran el vínculo entre la relación áurea y una clase especial de espiral logarítmica regida por esta relación.



Al construir bloques cuya longitud de lado sean números de Fibonacci se obtiene un dibujo que asemeja al rectángulo áureo



Por otra parte, la siguiente bella ecuación permite calcular el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci en función del número áureo φ:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right] \quad .$$

Además de aparecer en un modelo medieval de crecimiento de poblaciones, la sucesión de Fibonacci, así como el número áureo y algunas espirales logarítmicas asociadas a este número, pueden poseer un estimulante valor heurístico en la búsqueda de regularidades en el mundo natural. La botánica atestiguó esto tempranamente al encontrar relaciones entre la distribución de hojas en los tallos de algunas plantas, de las que surgían relaciones dadas por términos de la sucesión de Fibonacci. De modo similar, patrones espiralados encontrables en flores, frutos o moluscos, se ajustan aproximadamente a patrones geométricos vecinos a las espirales logarítmicas basadas en el número áureo (aunque muchas de las espirales del mundo natural no guardan relación con este número). Naturalmente, cada hallazgo empírico de este tipo plantea el desafío de encontrar la explicación específica ligada a la física o la fisiología involucradas. El espaciamiento de las hojas helicoidalmente ubicadas alrededor de ciertos tallos, y generando relaciones asociadas a los términos de la sucesión de Fibonacci, trató de ser explicado a partir de mecanismos hormonales adaptativos, y seleccionados durante la evolución, que tendrían como consecuencia final el maximizar la captura de luz por parte de las hojas. La generación de las espirales de las conchas de ciertos moluscos se intentó explicar por regularidades del crecimiento del animal durante su ciclo de vida. Seguramente el lector interesado podrá encontrar en la literatura especializada explicaciones actualizadas y más rigurosas sobre el origen de estas morfologías.

En el mundo de lo artificial, donde las construcciones de los objetos son guiadas por la mente humana, sí pueden encontrarse magníficas obras cuya estética se ajuste a deliberados patrones geométricos (aunque sujetos estos patrones a las limitaciones naturales que impone el mundo físico a cualquier intento de remedar una perfección matemática). Construcciones arquitectónicas como las de Le Corbusier o Dieste pueden tener una fuerte inspiración en geometrías asociadas a la relación aúrea o a las espirales logarítmicas. Es interesante que en el caso de la pintura, muchos de los artistas que han utilizado la relación áurea en sus obras lo han hecho conscientemente, por un conocimiento previo del contexto matemático (una descripción de esto se encuentra en el libro de Cleyet-Michaud mencionado antes). Un tema que no tocaremos aquí es el de la relación del número áureo con los objetos de simetría basada en el número cinco, como pentágonos regulares o la estrella de cinco puntas asociada a estos pentágonos.

La presencia ubicua del número áureo y de la sucesión de Fibonacci en el universo matemático, y sus invocados roles en los fenómenos naturales, nos llevan a la cuestión central de esta nota: ¿Está la Naturaleza estrictamente regida por las leyes de la matemática? (o, como suele decirse, ¿están las leyes de la naturaleza "escritas" en el lenguaje de las matemáticas?). O, por el contrario: ¿Es la riqueza siempre creciente de las construcciones matemáticas realizadas por los humanos la que permite permanentemente encontrar en estas construcciones estructuras que se adaptan muy ajustadamente a las realidades de la Naturaleza? Los platónicos de Coleridge quizá respondieran afirmativamente a la primera pregunta, y los aristotélicos quizá respondieran afirmativamente a la segunda.

La interpretación del papel de entidades como la relación áurea o las espirales logarítmicas, está vinculada (en parte) a las respuestas a estas preguntas, y presumiblemente no haya aquí respuestas de consenso. Como ejemplo al margen, señalo que el autor de esta nota tiende a sostener (contraviniendo seguramente el pensamiento de una buena parte de los eventuales lectores) que las maravillosas geometrías que exhibe la Naturaleza encuentran en la matemática poderosos instrumentos para intentar lograr descripciones muy apropiadas, aunque siempre aproximadas, y así obtener un marco que oriente la búsqueda de los fenómenos que subyacen ocultos tras esas morfologías y que finalmente las explicarán.

En todo caso, reiteramos algo que la historia de la Ciencia nos enseña continuamente: la pasión de los científicos por el conocimiento es un motor que promueve el progreso de nuestra comprensión del mundo en que vivimos, y las involuntarias pertenencias ideológicas a distintos bandos filosóficos no han impedido jamás a los verdaderos científicos contribuir enlazadamente e interactivamente al progreso de nuestra cultura. Y nunca les ha impedido admirar lo admirable, proceda de la metafísica que proceda. Esto es similar al hecho tan claro de que un ateo o un agnóstico pueden vivir con enorme intensidad emotiva la música sublime que compuso Bach arrobado por su pasión religiosa.

Eduardo Mizraji
Mayo 2012