

Electromagnetismo (2021)

Práctico 3

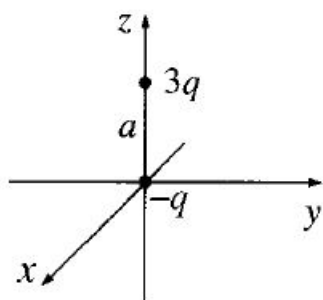
Dipolos y Desarrollo Multipolar

1. Calcular la fuerza y el torque que se ejercen sobre un dipolo debido a un campo eléctrico externo.
2. Se consideran dos dipolos coplanares p_1 y p_2 que tienen sus centros fijos siendo θ_1 y θ_2 los ángulos que forman los dipolos con la recta que los une. Hallar la condición que deben cumplir θ_1 y θ_2 para que los dipolos se encuentren en equilibrio.
3. Probar que los momentos multipolares de una distribución de carga esféricamente simétrica son todos nulos, excepto el momento monopolar (se comporta como una carga puntual).
4. Hallar los momentos multipolares y la aproximación multipolar del potencial (hasta el cuadrupolo) de las siguientes distribuciones discretas de cargas, considerando $qd = p = cte$ cuando $d \rightarrow 0$.
 - a) Distribución lineal formada por una sucesión de cargas puntuales a igual distancia d , en el siguiente orden: $q, -2q, q$ y otra dada por la sucesión $-q, 3q, -3q, q$.
 - b) Distribución plana constituida por cuatro cargas: dos de valor q y dos de valor $-q$, situadas alternadas en los vértices de un cuadrado de lado d . Hallar el potencial en los puntos del plano cuadrado.
5. Utilizando el desarrollo multipolar (hasta el orden cuadrupolar), estimar el error porcentual cometido en el cálculo del potencial de un cubo uniformemente cargado, cuando se supone como una carga puntual. Considere que la arista es de $0,1m$ y la distancia de su centro al punto de observación es de $1m$.
6. Considere la región del espacio encerrada en una esfera de radio $r = b$ centrada en el origen. Si se sabe únicamente que el campo eléctrico en dicha región es:

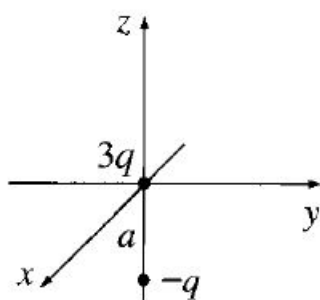
$$E(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} [(1 - \cos(\theta))\hat{e}_r + \sin(\theta)\hat{e}_\theta] & r < a \\ \frac{\rho_0 a^3}{\epsilon_0 r^3} [(r[1 + 3\cos(\theta)] - 4a\cos(\theta))\hat{e}_r + \sin(\theta)[3r - 2a]\hat{e}_\theta] & a < r < b \end{cases}$$

- a) Halle la densidad de carga en todo punto interior a la esfera de radio $r = b$.
- b) Demuestre que el campo cumple la condición electroestática $\nabla \times \vec{E} = 0$. ¿Existe alguna otra condición que debe verificar el campo eléctrico?

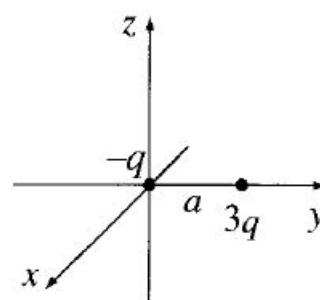
- c) Obtenga el campo eléctrico generado únicamente por la densidad de carga interior a la esfera de radio $r = b$, para puntos $\vec{r}$ lejanos al origen despreciando términos del campo eléctrico de orden $\frac{1}{r^4}$ y superiores.
7. La distribución de carga $\rho(\vec{r})$ de un núcleo atómico está concentrada en dimensiones del orden de 10^{-13}cm . El potencial de los núcleos se aproxima en general por $\varphi = \frac{Ze}{r}$, lo que equivale a suponer que $\rho(\vec{r})$ está distribuido de forma esféricamente simétrica. No hay evidencia de que ningún núcleo tenga momento dipolar. Sin embargo, sí existe evidencia de que muchos tienen momento cuadrupolar Q distinto a cero.
- a) Para simplificar, considere $\rho(\vec{r})$ uniforme en un elipsoide de revolución de semiejes a y b . Calcule Q respecto de ejes apropiados. La carga total es $q = Ze$.
- b) ¿Qué característica cualitativa del elipsoide revela el signo de Q_{zz} ?
- c) Estime la asimetría de la distribución. Para $Z = 63$ y $\frac{Q_{zz}}{e} = 2,5 \times 10^{-24} \text{cm}^2$. Suponiendo que el radio medio es $R = \frac{a+b}{2} = 7 \times 10^{-13} \text{cm}$, determinar la diferencia $\frac{(a-b)}{R}$.
8. Una fina barra aislante, que va desde $z = -a$ a $z = +a$, tiene las densidades de carga lineal indicadas (con k una constante). En cada caso, encuentre el primer término no nulo del desarrollo multipolar del potencial:
- a) $\lambda = k \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)$
- b) $\lambda = k \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)$
- c) $\lambda = k \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)$
9. Para el caso de un cascarón esférico de radio R con densidad de carga superficial $\sigma = k \cos\theta$.
- a) Calcule el momento dipolar de esta distribución.
- b) Encuentre el potencial aproximado en un punto lejano a esfera. Compare con la solución exacta.
10. Dos cargas puntuales, con carga $3q$ y $-q$ y separadas una distancia a . Encuentre momento monopolar, momento dipolar y potencial aproximado para distancias alejadas, para cada uno de los casos que se muestra en la figura. Utilice coordenadas esféricas e incluya contribuciones de los términos monopolar y dipolar.



(a)



(b)



(c)