Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra I
Segundo semestre de 2021

Repartido 3: Ideales

1. Sean m, n enteros positivos. Probar:

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}, \qquad m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = q\mathbb{Z}, \qquad (m\mathbb{Z})(n\mathbb{Z}) = mn\mathbb{Z},$$

siendo $d = \text{mcd}(m, n)$ y $q = \text{mcm}(m, n)$

2. *a*) Probar que dado un ideal H de $\mathbb{Z}$, siempre existe otro ideal K de $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z} = H + K$.

   b) Probar que si H es un ideal propio de $\mathbb{Z}$, entonces no existe ningún ideal K de $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z} = H \oplus K$.

3. Dados un anillo A y $b \in A$, probar que $Ab = \{ab \mid a \in A\}$ es el menor ideal izquierdo que contiene a b.

4. El objetivo de este ejercicio es describir los ideales izquierdos de $M_2(\mathbb{R})$.

   a) Probar que si $c, d \in \mathbb{R}$ y $MB = \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, entonces $M_2(\mathbb{R})B = \{\left(\begin{smallmatrix} cx & dx \\ cy & dy \end{smallmatrix}\right) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

   b) Probar que si $0 \neq I \lhd_l M_2(\mathbb{R})$, entonces existen $c, d \in \mathbb{R}$ tal que $0 \neq \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in I$.

   c) Probar que si existen $I \lhd_l M_2(\mathbb{R})$ y $A, C \in I$ tal que alguna fila de A es linealmente independiente con alguna fila de B, entonces existe una matriz $C \in I$ cuyas filas son linealmente independientes.

   d) Concluir que si $I \lhd_l M_2(\mathbb{R})$ no es trivial, entonces existen $c, d \in \mathbb{R}$ tal que $I = M_2(\mathbb{R}) \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

5. Probar que si A y B son dos anillos no nulos, entonces su producto cartesiano $A \times B$, con las operaciones definidas coordenada a coordenada, es un anillo que no es simple.

6. Un elemento e de un anillo A se dice *idempotente* si $e^2 = e$; si además $ea = ae, \forall a \in A$, entonces se dice que e es un *idempotente central*. Un conjunto de *idempotentes ortogonales* es un conjunto de idempotentes $e_1, \ldots, e_n$ tales que $e_i e_j = 0$, para todo $i \neq j$.

   a) Probar que si A es un dominio, entonces sus únicos elementos idempotentes son 0 y 1.

   b) Probar que si e es idempotente central, Ae (además de ser un ideal de A) es un anillo con unidad e (no es un subanillo de A).

   c) Probar que si $e \in A$ es un idempotente (central) y $f = 1 - e$, entonces f es un idempotente (central) y e, f son ortogonales.

   d) Sean $e, f \in A$ idempotentes ortogonales que conmutan entre sí y sean $I = Ae$ y $J = Af$.

      1) Probar que e, f son ortogonales si y solo si la suma $I + J$ es directa.

      2) Probar que si e, f son centrales, se tiene además $IJ = 0$.

   e) Deducir que si e es idempotente central, se tiene

      - $A = Ae \oplus A(1 - e)$ (suma de ideales)
      - $A \cong Ae \times A(1 - e)$ (producto cartesiano de anillos con unidad).

7. Sea A un anillo. El objetivo de este ejercicio es describir los ideales de $M_n(A)$, el anillo de matrices $n \times n$ con coeficientes en A.

   a) Probar que si I es un ideal de A y $M_n(I) \subset M_n(A)$ es el subconjunto de las matrices con coeficientes en I, entonces $M_n(I)$ es un ideal de $M_n(A)$.

b) Probar que para todo ideal K de $M_n(A)$ se cumple que existe un ideal I de A tal que $K = M_n(I)$.

c) Probar que si A es un anillo con división, entonces $M_n(A)$ es un anillo simple.

8. Se considera el anillo $\mathbb{Z}_6$.

   a) Hallar todos sus elementos idempotentes.

   b) Encontrar dos ideales no triviales H y K de $\mathbb{Z}_6$ tales que $\mathbb{Z}_6 = H \oplus K$.

9. Sea A un anillo, y sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. Decimos que $\sim$ es una *congruencia* si para todos los $a, a', b, b' \in A$ tales que $a \sim a'$, $b \sim b'$, se cumple que $a + b \sim a' + b'$, $-a \sim -a'$, $ab \sim a'b'$.

   a) Sea $\sim$ una relación de equivalencia. Probar que son equivalentes:

      I) $\sim$ es una congruencia,

      II) Las operaciones $\overline{x}+\overline{y} = \overline{x + y}$, $\quad \overline{x}\cdot\overline{y} = \overline{x \cdot y}$, $\quad \forall x, y \in A$ en $A/_\sim$ están bien definidas y dotan a $A/_\sim$ de una estructura de anillo,

      III) $\sim$ es un subanillo de $A \times A$ (como en el ejercicio 5).

   b) Probar que si $\sim$ es una congruencia en A, entonces $I := \{a \in A : a \sim 0\} \lhd A$ tal que $A/_\sim = A/I$. Recíprocamente, probar que si $I \lhd A$, entonces la relación $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I$ es una congruencia en A tal que $A/_\sim = A/I$.

10. Dado un morfismo de anillos $\varphi : A \to B$, se define $\varphi_* : M_n(A) \to M_n(B)$ mediante lo siguiente: si $X = (x_{ij}) \in M_n(A)$ entonces $\varphi_*(X) = (b_{ij}) \in M_n(B)$, siendo $b_{ij} = \varphi(x_{ij})$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

    a) Probar que φ_* es un morfismo de anillos.

    b) Sean A un anillo e $I \lhd A$. Probar $M_n(A)/M_n(I) \simeq M_n(A/I)$.

11. Dado un anillo A, sea $B_n(A) \subset M_n(A)$ el conjunto de matrices cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son nulos y $N_n(A) \subset B_n(A)$ el subconjunto de matrices cuyos elementos en la diagonal principal son nulos.

    a) Probar que $B_n(A)$ es un subanillo de $M_n(A)$.

    b) Probar que $N_n(A)$ es un ideal de $B_n(A)$, pero no es un ideal de $M_n(A)$.

    c) Sea $D_n(A) \subset M_n(A)$ el subanillo de matrices diagonales. Probar $B_n(A)/N_n(A) \simeq D_n(A)$.

12. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, A un anillo y A^X el anillo de funciones de X en A. Dado $S \subset X$, sea

$$I_S = \{f \in A^X : f(x) = 0, \ \forall x \in S\}.$$

    a) Probar que I_S es un ideal de A^X.

    b) Probar que A^X/I_S es isomorfo a A^S.

    c) Sean S y T subconjuntos de X tales que $S \cup T = X$. Probar que $I_S \cap I_T = I_S I_T = \{0\}$.

13. Dos ideales H y K de un anillo A se dicen *primos entre sí* si $H + K = A$. Probar que en $\mathbb{Z}$, dos ideales $m\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son primos entre sí si y solo si m y n son primos entre sí.

14. (*Teorema chino de los restos*) Sea A un anillo e $I_1, \ldots, I_n$ una familia de ideales de A que son primos dos a dos.

a) Teniendo en cuenta $A = A^2 = (I_1 + I_2)(I_1 + I_3)$, deducir $A = I_1 + I_2 \cap I_3$.

b) Probar por inducción en n que para cada $i = 1, \ldots, n$, vale $A = I_i + \bigcap_{j \neq i} I_j$.

c) Probar que para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $a_i \in A$ tal que $a_i \equiv 1\,(I_i)$ y $a_i \equiv 0\,(I_j)$, $\forall j \neq i$.

d) Se define $\varphi : A \to A/I_1 \times \cdots \times A/I_n$ por $\varphi(x) = (\overline{x}, \cdots, \overline{x})$. Probar que φ es sobreyectivo. *Sugerencia*: aplicar la parte 14c.

e) Probar

$$\frac{A}{I_1 \cap \cdots \cap I_n} \simeq \frac{A}{I_1} \times \cdots \times \frac{A}{I_n}.$$

15. a) Escribir el enunciado del *Teorema chino de los restos* para $\mathbb{Z}$.

b) Utilizar la parte a) parar resolver el problema original del matemático chino Sun Tzu (siglo III): ¿cuántos soldados tiene el escuadrón de Han Xing si sabemos que al ordenarlos de a tres columnas quedan dos soldados de lado, al ordenarlos de a cinco columnas quedan tres soldados de lado, al ordenarlos por siete columnas quedan dos soldados de lado, y tiene entre 100 y 200 soldados?

c) Utilizar la parte a) para probar que existen cadenas arbitrariamente largas de enteros consecutivos tales que cada uno de ellos es divisible por un cuadrado perfecto.

d) Deducir que si $m = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$, siendo $p_1, \ldots, p_r$ números primos distintos y $n_1, \ldots, n_r$ enteros positivos, entonces $\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_r^{n_r}}$.