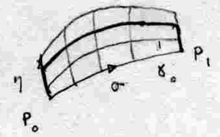
Hay dos teoremas muy importantes que desarollariemos a partir de la definición de la curvatura.

- uno dice que la curvatura mide cuanto el transporte paralelo depende del camino usado para transportar. Como corolarios veremos que cuando la curvatura es cero el transporte paralelo es independiente del camino, y que en este caso existen coordenadas inerciales globales.
- el segundo da una expresión en términos de curvatura para la aceleración en el desplazamiento entre dos geodesicas muy cercanas entre si. En otras palabras, da la aceleración relativa de dos partículas vecinos que caen libremente - lo que en la teoría de Newton esta dado por $\Delta\ddot{x}^i = \Delta x^j \partial_j g^i$, con $\Delta\vec{x}$ la separación.

Empezamos con enunciar el primer teorema:

- Sea $\gamma(\sigma,\eta)$ una familia de curvas, con σ el parametro de cada curva y η parametrizando a la familia, tal que las coordenadas $\gamma(\sigma,\eta)^\mu$ de los puntos sobre las curvas dependen suavemente de σ y η.
- Sean $v = \frac{d}{d\sigma}$ y $n = \frac{d}{d\eta}$, y γ_0 la curva $\eta = 0$, con punto inicial $P_0 = \gamma_0(0) = \gamma(0,0)$ y punto final $P_1 = \gamma_0(1) = \gamma(1,0)$.
- Sea u un vector en P_0 y $u^{\parallel}(\sigma,\eta)$ el resultado de transportarlo paralelamente primero según n desde P_0 hasta $\gamma(0,\eta)$ y luego según v desde $\gamma(0,\eta)$ a $\gamma(\sigma,\eta)$.



- Sea $u^{\parallel}_\eta(P_1)$ el resultado de transportar $u^{\parallel}(1,\eta)$ paralelamente según $-n$ hasta $P_1 = \gamma(1,0)$, es decir, de transportar u paralelamente $P_0 \to \gamma(0,\eta) \to \gamma(1,\eta) \to P_1$

<u>Teorema 1</u>: $\frac{d}{d\eta} u^{\parallel\mu}_\eta(P_1)\Big|_{\eta=0} = \int_{\gamma_0} R^{\parallel\mu}{}_{\nu v n}\, d\sigma\; u^{\parallel\nu}_0(P_1)$

con $R^{\parallel\mu}{}_{\nu v n}(\sigma)$ = "$R^\mu{}_{\nu\rho\lambda} v^\rho n^\lambda(\sigma)$ transportado paralelamente a lo largo de γ_0 desde $\gamma_0(\sigma)$ hasta P_1."

Primero demostramos un

Lema. $D_v n - D_n v = 0$

Dem: $D_v n^\rho - D_n v^\rho = v^\mu \partial_\mu n^\rho - n^\mu \partial_\mu v^\rho + \cancel{\Gamma^\rho_{\mu\nu} v^\mu n^\nu} - \cancel{\Gamma^\rho_{\mu\nu} n^\mu v^\nu}$

$$= \left[\frac{d}{d\sigma}\frac{d}{d\eta} - \frac{d}{d\eta}\frac{d}{d\sigma} \right] x^\rho$$

Pero x^ρ restringido a la familia de curvas es una funcion suave de σ y η. Entonces

$$\left[\frac{d}{d\sigma}\frac{d}{d\eta} - \frac{d}{d\eta}\frac{d}{d\sigma} \right] x^\rho = \left[\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\eta} - \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\sigma} \right] x^\rho = 0$$

($\frac{d}{d\sigma}$ se toma segun una curva de η = constante, y $\frac{d}{d\eta}$ según σ = constante.) ∎

En general, para cualquier campos vectoriales a, b, c

$$[D_a, D_b]\, c^\sigma = D_a [b^\nu D_\nu c]^\sigma - D_b [a^\nu D_\nu c]^\sigma$$

$$= a^\mu b^\nu [D_\mu, D_\nu]\, c^\sigma + (D_a b - D_b a)^\nu D_\nu c^\sigma$$

$$= R^\sigma{}_{\rho a b}\, c^\rho + [a,b]^\rho D_\rho c^\sigma$$

∴

$[a,b]^\rho \equiv [D_a b - D_b a]^\rho = d_a b^\rho - d_b a^\rho$ ⟵ porque Γs cancelan como vimos,

$= [d_a d_b - d_b d_a]\, x^\rho$ porque $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$.

Se llama el corchete de Lie, o el conmutador, de los campos a y b. Siempre es cero para los tangentes a ejes de coordenadas: $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$

Por el lema tenemos $[v, n] = 0$. Entonces

$$D_v D_n u^\sigma - D_n D_v u^\sigma = R^\sigma{}_{\rho v n}\, u^\rho$$ para cualquier campo vectorial u

Es decir, σ y η se pueden tratar como un par de coordenadas en el conmutador de derivadas covariantes.

Ahora podemos demostrar el teorema:

Dem: Dado que $D_\sigma u^{\parallel} = 0$ en cada curva de $\eta = \text{constante}$ $D_n D_\sigma u^{\parallel} = 0$, y

$$D_\sigma D_n u^{\parallel\sigma} = R^\sigma{}_{\rho\sigma n}\, u^{\parallel\rho}$$

Expresamos esto en terminos de una base de vectores, $e_{(\alpha)}$, transportado paralelamente según γ_0. (No es necesario que sea una base de coordenadas para alguna carta, aunque se puede definir una carta para que lo sea. Cualquier base se puede usar para definir a los componentes de tensores.)

- La parentesis entorno a α en $e_{(\alpha)}$ es para dejar en claro que se trata de la etiqueta que distingue a los vectores de la base y no del indice de los componentes de estos vectores

$$D_\sigma D_n u^{\parallel} = D_\sigma\left((D_n u^{\parallel})^\alpha e_{(\alpha)} \right) = d_\sigma (D_n u^{\parallel\alpha})\, e_{(\alpha)} + D_n u^{\parallel\alpha} \underbrace{D_\sigma e_{(\alpha)}}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad d_\sigma (D_n u^{\parallel\alpha}) = R^\alpha{}_{\beta\sigma n}\, u^{\parallel\beta}$$

$$\therefore \Rightarrow \quad D_n u^{\parallel\alpha}\big|_{\sigma=1} = \int_0^1 R^\alpha{}_{\beta\sigma n}\, u^{\parallel\beta}\, d\sigma + D_n u^{\parallel\alpha}\big|_{\sigma=0}$$

Pero $u^{\parallel}$ es transportado paralelo según n en $\sigma=0$. Entonces $D_n u^{\parallel\alpha}\big|_{\sigma=0} = 0$

Ademas $$D_n u^{\parallel\alpha}\big|_{\sigma=1} = \lim_{\eta\to 0} \frac{\left(u^{\parallel}(\eta) \text{ transportado paralelo a } P_1 - u_0^{\parallel}(P_1)\right)^\alpha}{\eta - 0}$$

$$= \lim_{\eta \to 0} \frac{u_\eta^{\parallel\alpha}(P_1) - u_0^{\parallel\alpha}(P_1)}{\eta - 0}$$

$$= \frac{d u_\eta^{\parallel\alpha}(P_1)}{d\eta}\Big|_{\eta=0}$$

Así $$\frac{d}{d\eta} u_\eta^{\parallel\alpha}(P_1)\Big|_{\eta=0} = \int_0^1 R^\alpha{}_{\beta\sigma n}\, u_0^{\parallel\beta}\, d\sigma$$

Ya que $u_0^{\parallel}$ es transportado paralelamente tiene componentes $u_0^{\parallel\alpha}$ constantes en la base $e_{(\alpha)}$ transportada paralelamente. Así $u_0^{\parallel\alpha} = u_0^{\parallel\alpha}(P_1)$ y se puede sacar fuera del integral.

De la misma manera, si se transporta $R^{\cdot}{}_{\cdot\sigma n}(\sigma)$ paralelamente según γ_0 desde σ a P_1 conservaría sus componentes en la base $e_{(\alpha)}$. Entonces

$$R^{\alpha}{}_{\beta\sigma n}(\sigma) = R^{\parallel\alpha}{}_{\beta\sigma n}(\sigma)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\eta} u_{\eta}^{\parallel\alpha}(P_1) = \int_0^1 R^{\parallel\alpha}{}_{\beta\sigma n}(\sigma)\, d\sigma \quad u_0^{\parallel\beta}(P_1)$$

Ya que todos los tensores que aparecen en esta expresión están basadas en P_1 (son funciones multilineales de vectores en T_{P_1} y covectores en $T^*_{P_1}$) podemos cambiar desde la base $e_{(\alpha)}$ a una cualquiera en P_1:

$$\frac{d}{d\eta} u_{\eta}^{\parallel\mu}(P_1) = \int_0^1 R^{\parallel\mu}{}_{\nu\sigma n}(\sigma)\, d\sigma \quad u_0^{\parallel\nu}(P_1) \qquad \blacksquare$$

<u>Espacio tiempo plano</u>

- Es claro que <u>si</u> hay coordenadas inerciales globales z^{κ} entonces la curvatura es cero: En coordenadas inerciales la derivada covariante se reduce a una derivada común, $D_{\beta} a^{\gamma} = \partial_{\beta} a^{\gamma}$, donde las coordenadas son inerciales. Si son inerciales en todo un abierto, y no solo en un punto entonces esta relación vale en el abierto. En este caso $D_{\alpha} D_{\beta} a^{\gamma} = \partial_{\alpha} D_{\beta} a^{\gamma} = \partial_{\alpha}\partial_{\beta} a^{\gamma}$. Entonces

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, a^{\beta} = \partial_{\gamma}\partial_{\delta} a^{\beta} - \partial_{\delta}\partial_{\gamma} a^{\beta} = 0 \quad \forall a^{\beta} \Rightarrow R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 0 \Rightarrow R^{\cdot}{}_{\cdot\cdot\cdot} = 0.$$

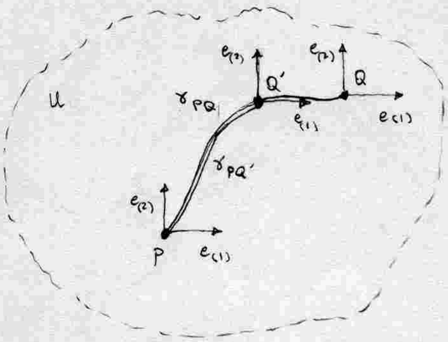
- El teorema que hemos demostrado sobre la dependencia del camino del transporte paralelo nos permite establecer la inversa:

<u>Corolario</u> Si $R^{\cdot}{}_{\cdot\cdot\cdot} = 0$ en una región $\mathcal{U}$ del espacio tiempo que es abierta y simplemente conexa entonces coordenadas inerciales globales en $\mathcal{U}$.

- Con este corolario podemos concluir que los espacio tiempos que admiten referenciales inerciales globales, como los de Newton y de la relatividad en ausencia de gravedad, son planos y que ausencia de gravedad $\Leftrightarrow$ curvatura cero.

Demostración del corolario:

Elegí una base de vectores $e_{(\alpha)}$ en un punto $P \in \mathcal{U}$, y caminos γ_{PQ} suaves a pedazos conectando P a cualquier otro punto $Q \in \mathcal{U}$. Definí $e_{(\alpha)}$ en Q como el transporte paralelo de $e_{(\alpha)}(P)$ a Q por γ_{PQ}.



Si para cada Q' en γ_{PQ} tomamos como $\gamma_{PQ'}$ el segmento de γ_{PQ} entre P y Q' entonces $D_v e_{(\alpha)} = 0$, con v el tangente a γ_{PQ}, a lo largo de γ_{PQ}, y en particular en Q.

Porque $\mathcal{U}$ es simplemente conexa γ_{PQ} se puede deformar continuamente a cualquier otro camino suave a pedazos entre P y Q en $\mathcal{U}$. Por el teorema $R^{\cdot}{}_{\cdots} = 0$ implica que esta deformación no cambia el campo $e_{(\alpha)}$. Entonces $D_w e_{(\alpha)} = 0$ en Q $\forall w \in T_Q$.

$\Rightarrow D_\mu e^\sigma_{(\alpha)} = 0$ en todo $\mathcal{U}$, Es decir, la base $e_{(\alpha)}$ es "covariantemente constante".

Las coordenadas inerciales globales z^α van a ser los parametros de las curvas integrales de $e_{(\alpha)}$ (que son geodesicas) tal que $e_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$. La manera mas fácil de mostrar que esto funciona es a traves de la base dual $\omega^{(\alpha)}$. Si $e_{(\alpha)} = e^\mu_{(\alpha)} \partial_\mu$ en una carta x^μ entonces $\omega^{(\alpha)} = \omega^{(\alpha)}_\mu \mathbf{d}x^\mu$ con $\omega^{(\alpha)}_\mu$ la matriz inversa de $e^\mu_{(\alpha)}$.

$$\omega^{(\alpha)}[e_{(\beta)}] = \omega^{(\alpha)}_\mu e^\nu_{(\beta)} \mathbf{d}x^\mu[\partial_\nu] = \omega^{(\alpha)}_\mu e^\nu_{(\beta)} \delta^\mu_\nu = \omega^{(\alpha)}_\mu e^\mu_{(\beta)} = \delta^\alpha_\beta$$

Así es efectivamente la dual.

Ahora $D e_{(\alpha)} = 0 \Rightarrow D\omega^{(\alpha)} = 0$:

$$0 = D_w[\delta^\alpha_\beta] = (D_w \omega^{(\alpha)}_\mu) e^\mu_{(\beta)} + \omega^\alpha_\mu \underbrace{D_w e^\mu_{(\beta)}}_{0} \qquad \forall w$$

$$\Rightarrow 0 = D_\mu \omega^{(\alpha)}_\nu = \partial_\mu \omega^{(\alpha)}_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \omega^{(\alpha)}_\sigma$$

Pero $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ es simetrico en $\mu\nu$. $\Gamma^\sigma_{[\mu\nu]} = 0$, así

$$0 = \partial_{[\mu} \omega^{(\alpha)}_{\nu]}$$

Porque $\mathcal{U}$ es simplemente conexa esto implica que existen funciones z^α tal que $\omega^{(\alpha)}_\nu = \partial_\nu z^\alpha$

$$\Longleftrightarrow \omega^{(\alpha)} = \mathbf{d}z^\alpha$$

Ahora queda solo verificar que las z^α son coordenadas inerciales globales.

- Primero chequeamos que son coordenadas. Esto es garantizado por el teorema de la función inversa ya que $\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu} = dz^\alpha[\partial_\mu] = \omega^{(\alpha)}{}_\mu$ es invertible en cada punto, siendo la inversa $e^\mu_{(\alpha)}$ que es no singular porque $e_{(\alpha)}$ es una base. (El teorema de la funcion inversa garantise que x^μ puede ser escrito como función de los z^α.). Note que $e_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ como dijimos porque si a es un vector $a^\alpha = dz^\alpha[a] = \omega^{(\alpha)}[a] \Rightarrow a^\alpha \partial_\alpha = a = a^\alpha e_{(\alpha)}$ $\forall a^\alpha$

- Verificamos que las coordenadas z^α son inerciales.

$$D_w a = D_w[a^\alpha e_{(\alpha)}] = (d_w a^\alpha)\, e_{(\alpha)} + a^\alpha \overbrace{D_w e_{(\alpha)}}^{0} = (d_w a^\alpha)\, e_{(\alpha)}$$

En particular, si $v = \frac{d}{d\lambda}$ es el parametro de una geodesica con parametro afín λ

entonces $$0 = D_v v^\alpha = d_v v^\alpha = \overset{d_v}{\frac{d}{d\lambda}}\ \overset{v^\alpha}{\frac{dz^\alpha}{d\lambda}}$$

$\Rightarrow$ la aceleración es cero en coordenadas z^α. ∎

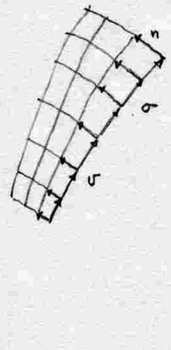
Teorema de desviación de geodésicas

De nuevo tenemos una familia de curvas $\gamma(\sigma,\eta)$, con σ el parametro de cada curva y η parametrizando a la familia, pero ahora las curvas son geodesicas y σ es un parametro afín. De nuevo $v = \frac{d}{d\sigma}$ y $n = \frac{d}{d\eta}$

Teorema 2 (desviación de geodesicas): $D_v D_v n^\mu = R^\mu{}_{vv\rho}\, n^\rho$.

Dem: Vimos ya que

$$D_v D_n v^\mu - D_n D_v v^\mu = R^\mu{}_{\nu v n}\, v^\nu = R^\mu{}_{vv\rho}\, n^\rho$$



Pero $D_v v^\mu = 0$, ya que $v = \frac{d}{d\sigma}$ es el tangente de una geodesica con parametrización afín

$$\Rightarrow D_v D_n v^\mu = R^\mu{}_{vv\rho}\, n^\rho$$

Ahora el lema nos dice que $D_n v = D_v n$

$$\Rightarrow D_v D_v n^\mu = R^\mu{}_{vv\rho}\, n^\rho$$ ∎

Para hacer a la ecuacion de desviacion de geodesicas lo mas concreta posible vamos a expresarla en coordenados s^α que caen libremente junto a las geodesicas. En estas coordenados $[D_v b]^\alpha = d_v[b^\alpha]$ no solo en un punto, pero en todos puntos sobre un segmento de la geodesica "fiducial", o de referencia, $\gamma_0 = \gamma(\sigma, 0) \leftarrow \eta = 0$

En estas coordenadas γ_0 es la curva $s^i = 0$ y las coordenados $\Delta s^i = \frac{ds^i}{d\eta}\Delta\eta = n^i \Delta\eta$ de una geodesica vecina ($\Delta\eta$ chico) satisfacen

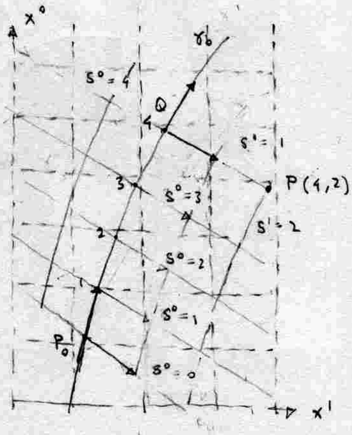
$$\frac{d^2 \Delta s^i}{dt^2} = R^i{}_{\sigma\sigma j}\, \Delta s^j$$

donde $t = s^0 = \sigma$.

Construimos entonces s^α: Sea x^μ una carta sobre un entorno de un segmento de γ_0 y sea $e_{(\alpha)}$ una base en un punto P_0 sobre γ_0, don $e_{(0)} = v$ el tangente a γ_0. Llevamos $e_{(\alpha)}$ a todo punto Q sobre γ_0 transportandola paralelamente desde P_0 a Q por γ_0. Porque γ_0 es una geodesica (y σ un parametro afín) $D_v v = 0$. Así sigue valiendo $e_{(0)} = v$ en todo γ_0. Vea Hartle 20.5

Ahora definimos a las coordenadas x^μ del punto $P(s^\alpha)$ con coordenadas s^α:

$$\therefore \quad x^\mu(P(s^\alpha)) = e^\mu_{(i)}(\sigma = s^0)\, s^i + x^\mu(\gamma_0(\sigma = s^0))$$



En $s^i = 0$ $\quad x^\mu(P(s^0, 0, 0, 0)) = x^\mu(\gamma_0(\sigma = s^0))$

$$\Rightarrow P(s^0; 0, 0, 0) = \gamma_0(\sigma = s^0)$$

Así efectivamente $s^i = 0$ y $s^0 = \sigma$ sobre γ_0.

Además,

$$\left.\frac{\partial x^\mu}{\partial s^i}\right|_{\gamma_0} = e^\mu_{(i)} \quad y \quad \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial s^0}\right|_{\gamma_0} = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\right|_{\gamma_0} = v^\mu = e^\mu_{(0)}$$

Así $\frac{\partial}{\partial s^\alpha} = e^\mu_{(\alpha)}\partial_\mu = e_{(\alpha)}$. Nota tambien que $\frac{\partial x^\mu}{\partial s^\alpha}$ es no singular sobre γ_0, lo cual implica por el teorema de la funcion inversa que s^α se puede expresar como funcion de x^μ y vice versa en un entorno de γ_0 en el dominio de x^μ. Entonces s^α forman una carta allí.

Ahora podemos evaluar $D_v D_v n$ en la carta s^α. Para cualquier campo vectorial b

$$D_v b = D_v[b^\alpha e_{(\alpha)}] = (d_v b^\alpha)\, e_{(\alpha)} + b^\alpha D_v e_{(\alpha)} = d_v[b^\alpha]\, e_{(\alpha)}$$ en todo γ_0 en dominio s^α

Entonces

$$D_v D_v n^\alpha = d_v[D_v n^\alpha] = \frac{d}{dt} D_v n^\alpha \quad y \quad D_v n^\alpha = d_v n^\alpha = \frac{dn^\alpha}{dt}$$ por un rango de t

$$\Rightarrow D_v D_v n^\alpha = \frac{d^2 n^\alpha}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 n^\alpha}{dt^2} = R^\alpha{}_{00\beta}\, n^\beta = R^\alpha{}_{00j}\, n^j$$ ya que $R^\alpha{}_{000} = 0$ por antisimetría en últimos dos índices

$$\Rightarrow \frac{d^2 n^i}{dt^2} = R^i{}_{00j}\, n^j \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \Delta s^i}{dt^2} = R^i{}_{00j}\, \Delta s^j}$$

Tambien hay la ecuacion $\frac{d^2 n^0}{dt^2} = R^0{}_{00j}\, n^j$. $n^0 \neq 0$ refleja que los puntos con igual s^0 en las geodesicas no tienen el mismo σ. No nos va interesar ahora.

$\Delta s^i = n^i \Delta\eta$ da la separacion en el mismo $t = s^0$

En la teoria Newtoniana $\frac{d^2 \Delta s^i}{dt^2} = \Delta s^j\, \partial_j g^i$. Así en una teoría cualquiera que satisface el principio de equivalencia mecanico $R^i{}_{00j}$ juega el rol de $\partial_j g^i$. Los que hicieron pregunta 10 del practico verificaron que $R^i{}_{00j} = \partial_j g^i$ en la teoria de Newton.

Ya en la epoca de Einstein la teoria de Newton era bien comprobada en vacío en referenciales moviendose lentamente relativo a las masas fuentes de gravedad. Así al menos en tales referenciales se debe cumplir la ecuación Newtoniana

$$\nabla\cdot\vec{g} = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{3} R^i{}_{00i} = \sum_{\alpha=0}^{3} R^\alpha{}_{00\alpha} \leftarrow \text{porque } R^0{}_{000} = 0$$

En otras palabras, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = -R^\sigma{}_{\mu\nu\sigma}$ debe satisfacer $R_{vv} = 0$, en vacío, al menos para 4-velocidades v cerca a las de las masas fuentes. Einstein optó por la condicion mas sencilla $R_{\mu\nu} = 0$. Esto es lo que da a las fuerzas de marea su característica forma tanto en las mareas en la Tierra como en ondas gravitacionales

$\nabla\cdot\vec{g} = 0$