

CTE II

Estructura Estelar

Cecilia Mateu

Instituto de Física, Facultad de Ciencias
Universidad de la República

¿Cómo conocemos las Propiedades de la Estrellas?

- **Propiedades Extrínsecas:**

- **Posición:** Angular + Distancia (Paralaje)

- **Velocidad**

- **Propiedades Estelares (Intrínsecas):**

- Temperatura

- Luminosidad

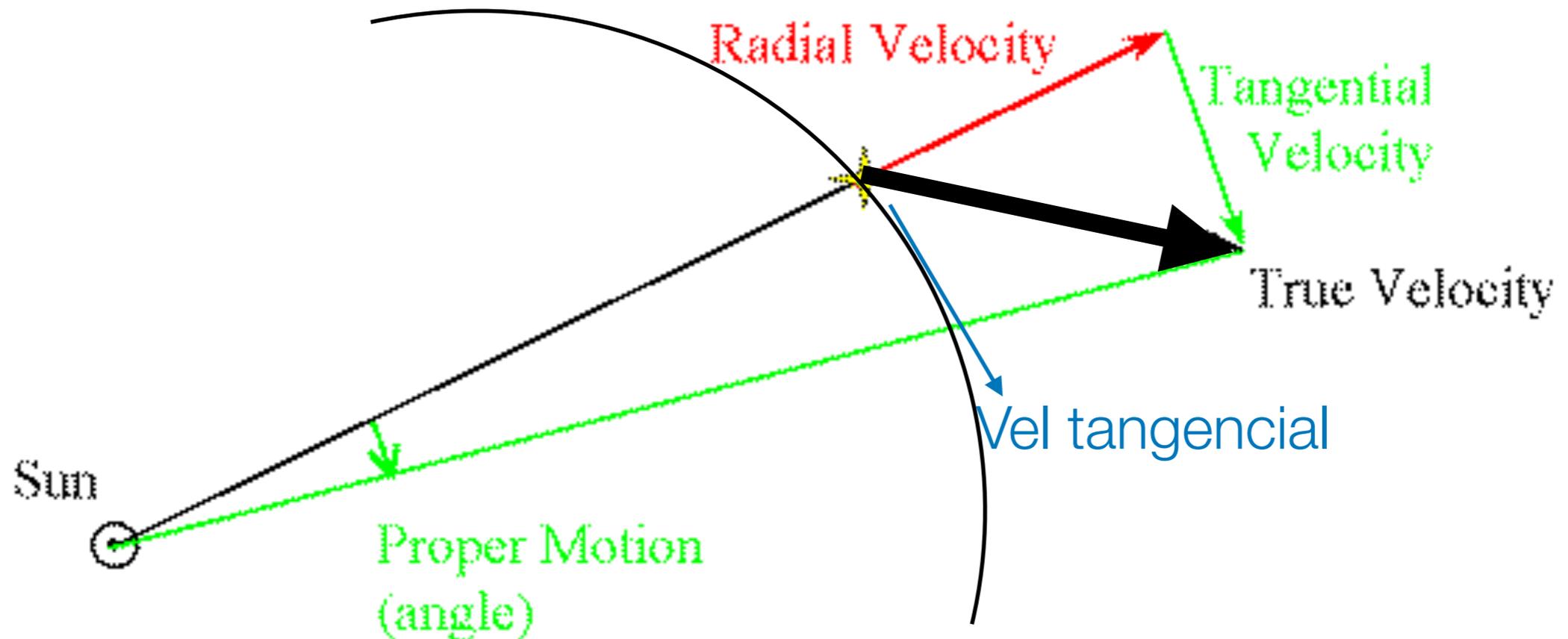
- Radio

- Masa

Medida de la velocidad

Velocidad

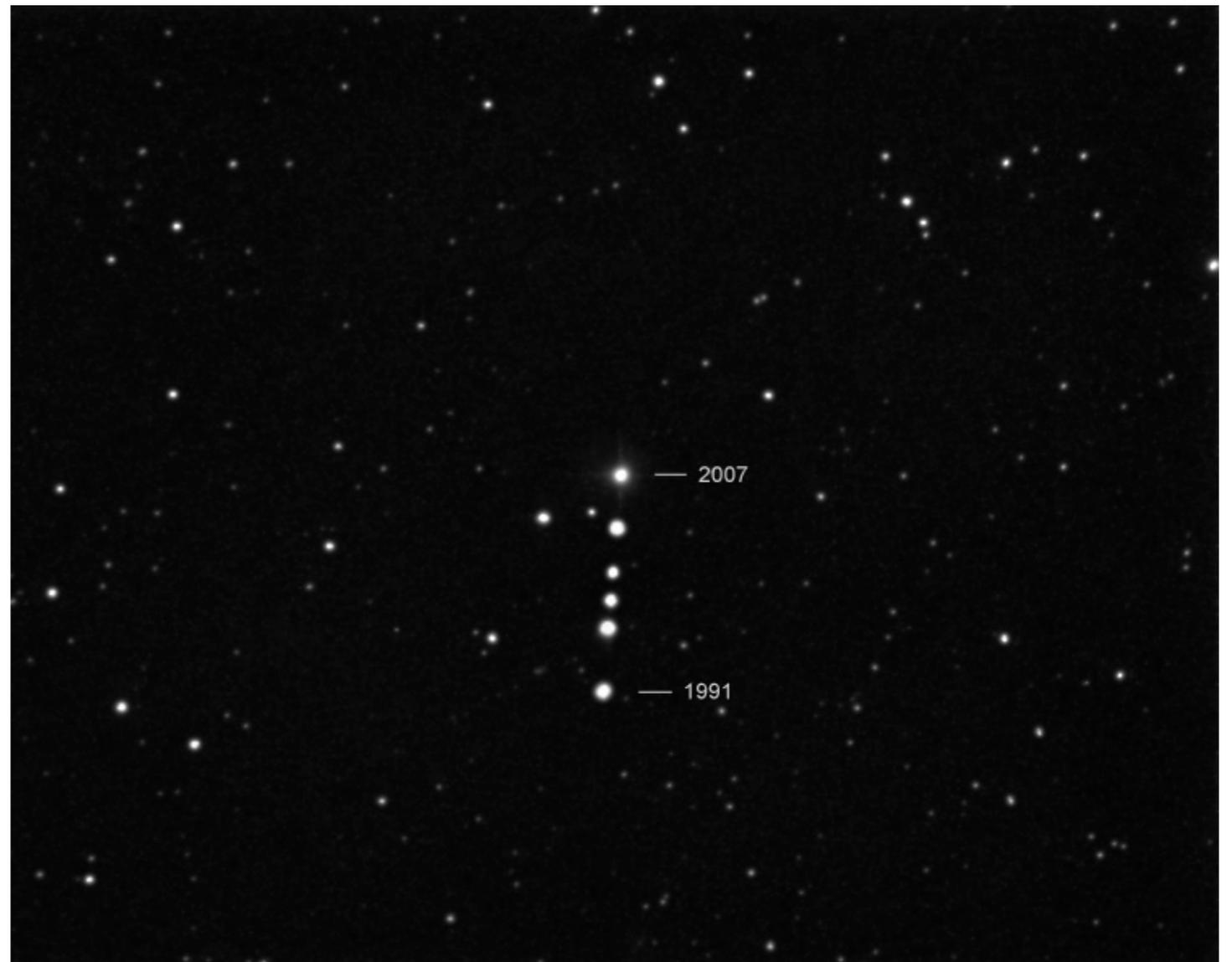
- Primero, descomponemos la velocidad en dos componentes: tangencial (en el plano del cielo) y radial (en la dir hacia el observador)



$$\text{Movimiento propio} = \text{Vel. angular} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{V_{tan}}{D}$$

La medida de velocidad (I): movimiento propio

- Para objetos cercanos podemos medir el cambio de posición angular en el cielo (movimiento propio)
- Se mide típicamente en milisegundos de arco por año



La medida de velocidad (I): movimiento propio

- Para objetos cercanos podemos medir el cambio de posición angular en el cielo (movimiento propio)
- Se mide típicamente en mili-segundos de arco por año
- La misión Gaia es capaz de medir movimiento propio con una precisión de decenas de micro-arcsec/año



LA MEDIDA DE VELOCIDAD (II): VELOCIDAD RADIAL

- podemos medir la velocidad radial (en dirección acercándose o alejándose de nosotros)

Efecto
Doppler:
cambio en
tono del
sonido según
la velocidad
de la fuente



LA MEDIDA DE VELOCIDAD (II): VELOCIDAD RADIAL

- pero sí podemos medir la velocidad radial (en dirección acercándose o alejándose de nosotros)

Efecto Doppler:
cambio en tono del sonido según la velocidad de la fuente



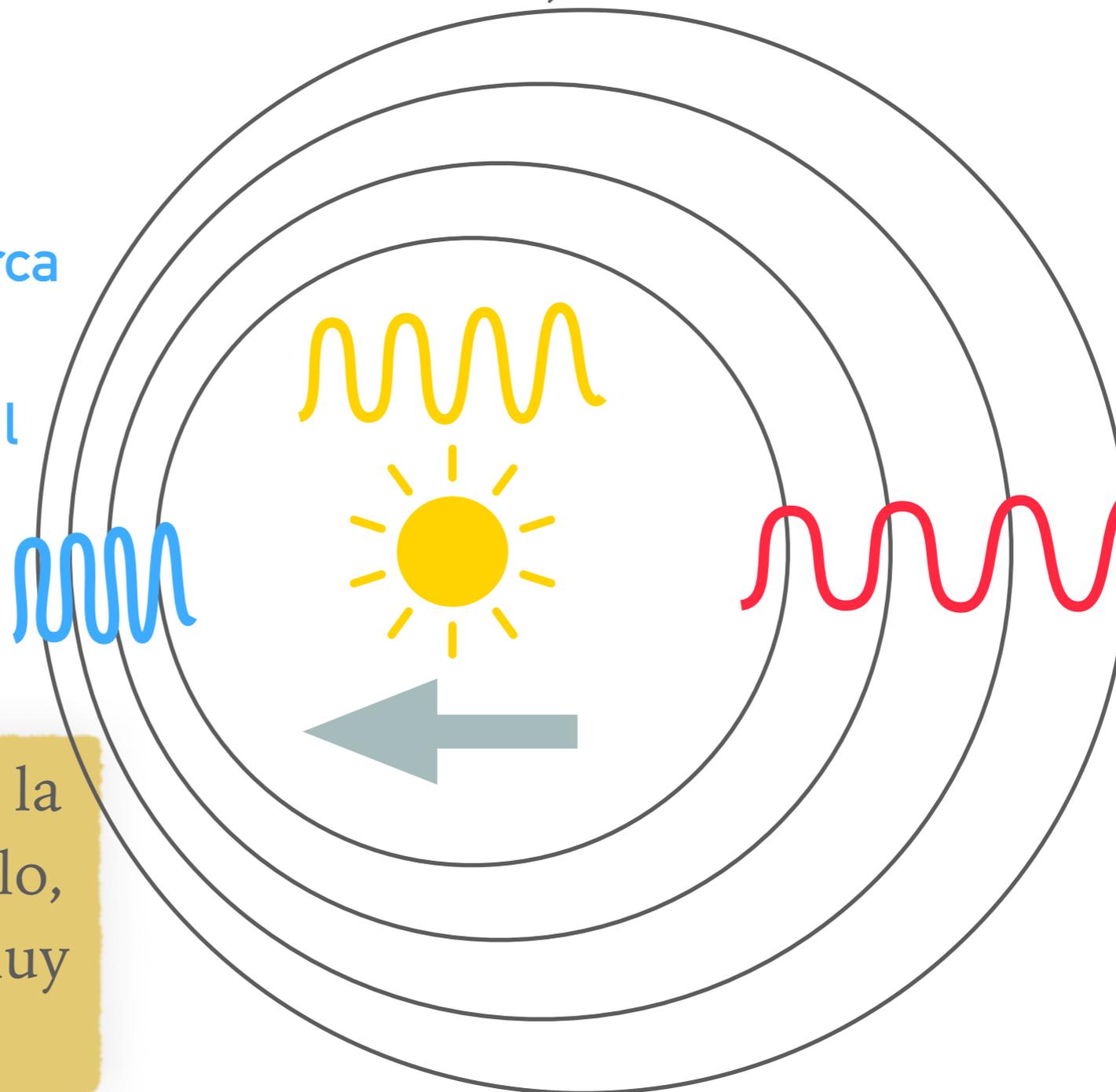
esto mismo pasa con la luz y podemos medirlo, incluso en galaxias muy lejanas

LA MEDIDA DE VELOCIDAD (II): VELOCIDAD RADIAL

- pero sí podemos medir la velocidad radial (en dirección acercándose o alejándose de nosotros)

Efecto Doppler:
cambio en tono del sonido según la velocidad de la fuente

se acerca
=
+ azul



se aleja
=
+ roja



esto mismo pasa con la luz y podemos medirlo, incluso en galaxias muy lejanas

EL CORRIMIENTO AL ROJO (REDSHIFT)

El corrimiento al rojo z se define como

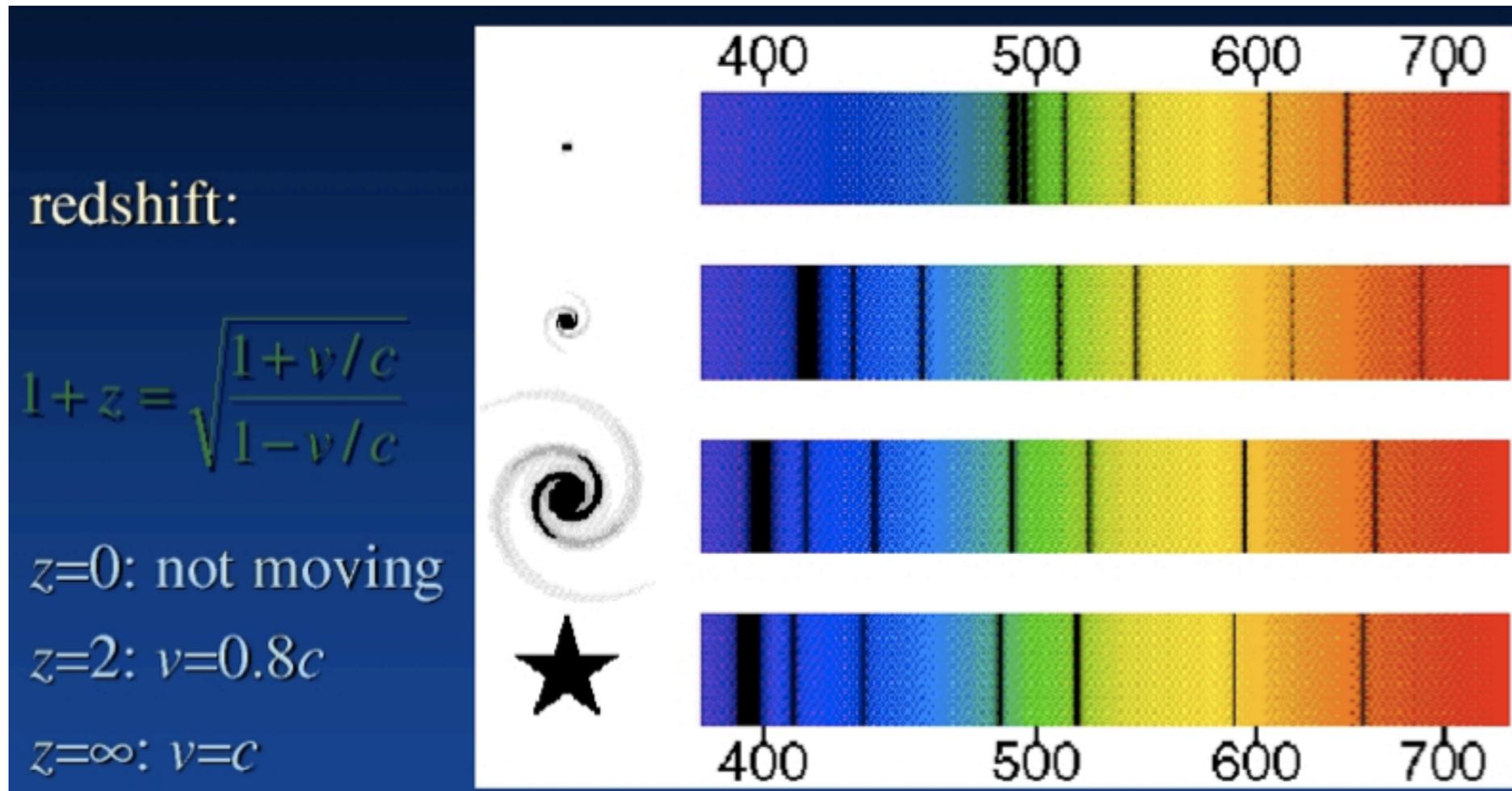
$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{reposo}}{\lambda_{reposo}}$$

La expresión clásica que relaciona z con la velocidad radial:

$$z = \frac{v_r}{c}$$

La expresión relativista es la más general y está dada por:

$$z = \frac{1 + v_r/c}{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}} - 1$$



¿Cómo conocemos las Propiedades de la Estrellas?

- **Propiedades Extrínsecas:**

- **Posición:** Angular + Distancia (Paralaje)
- **Velocidad:** Movimiento Propio + Velocidad Radial (Doppler)

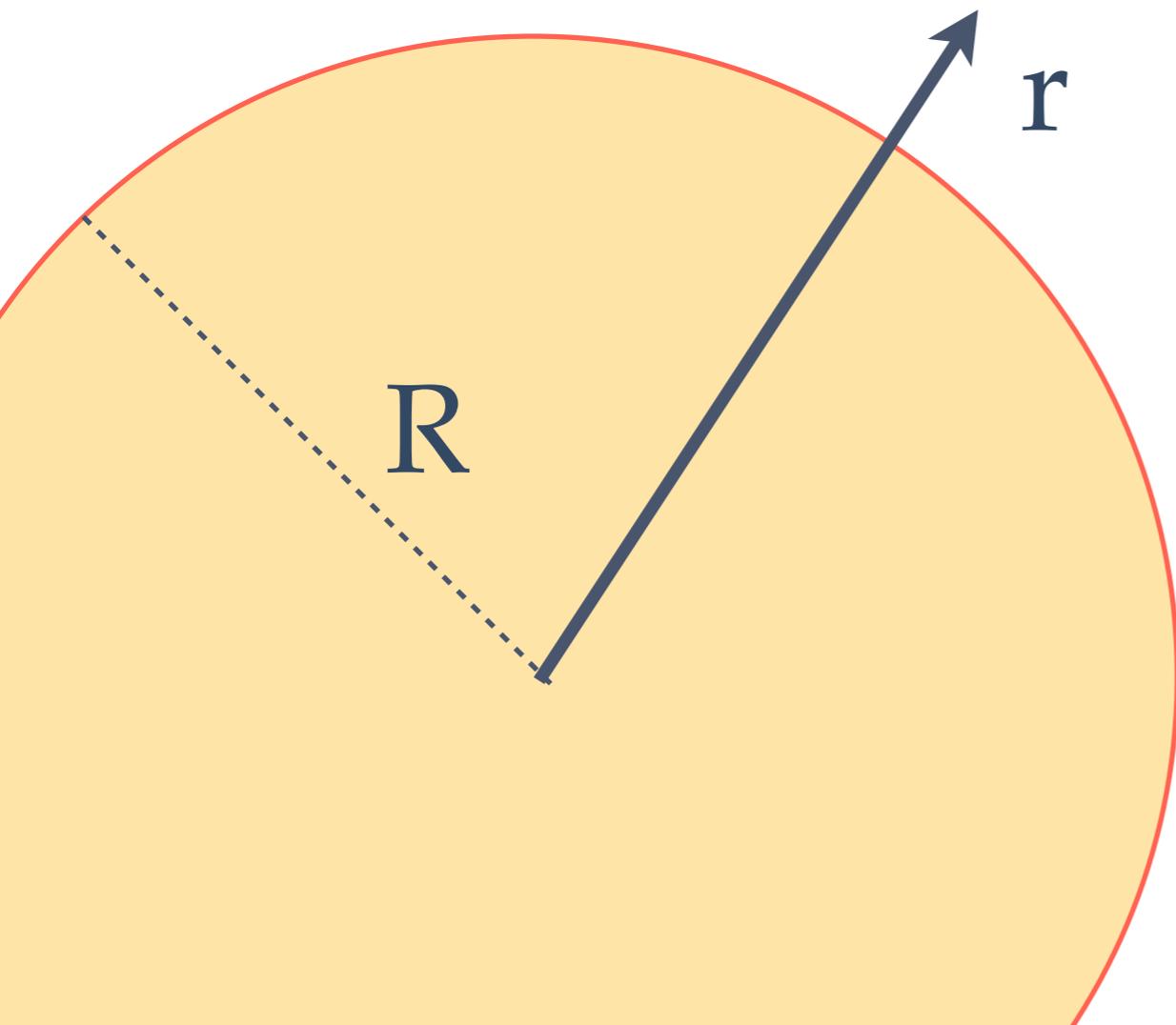
- **Propiedades Estelares (Intrínsecas):**

- **Temperatura:** color-Teff, ajuste del continuo o Ley de Wien
- **Luminosidad:** $F = L/(4\pi d^2)$
- **Radio:** $L = \sigma T^4(4\pi R^2)$
- **Masa:** Sistemas Binarios + 3º Ley de Kepler

Estructura Estelar

¿Qué es una estrella?

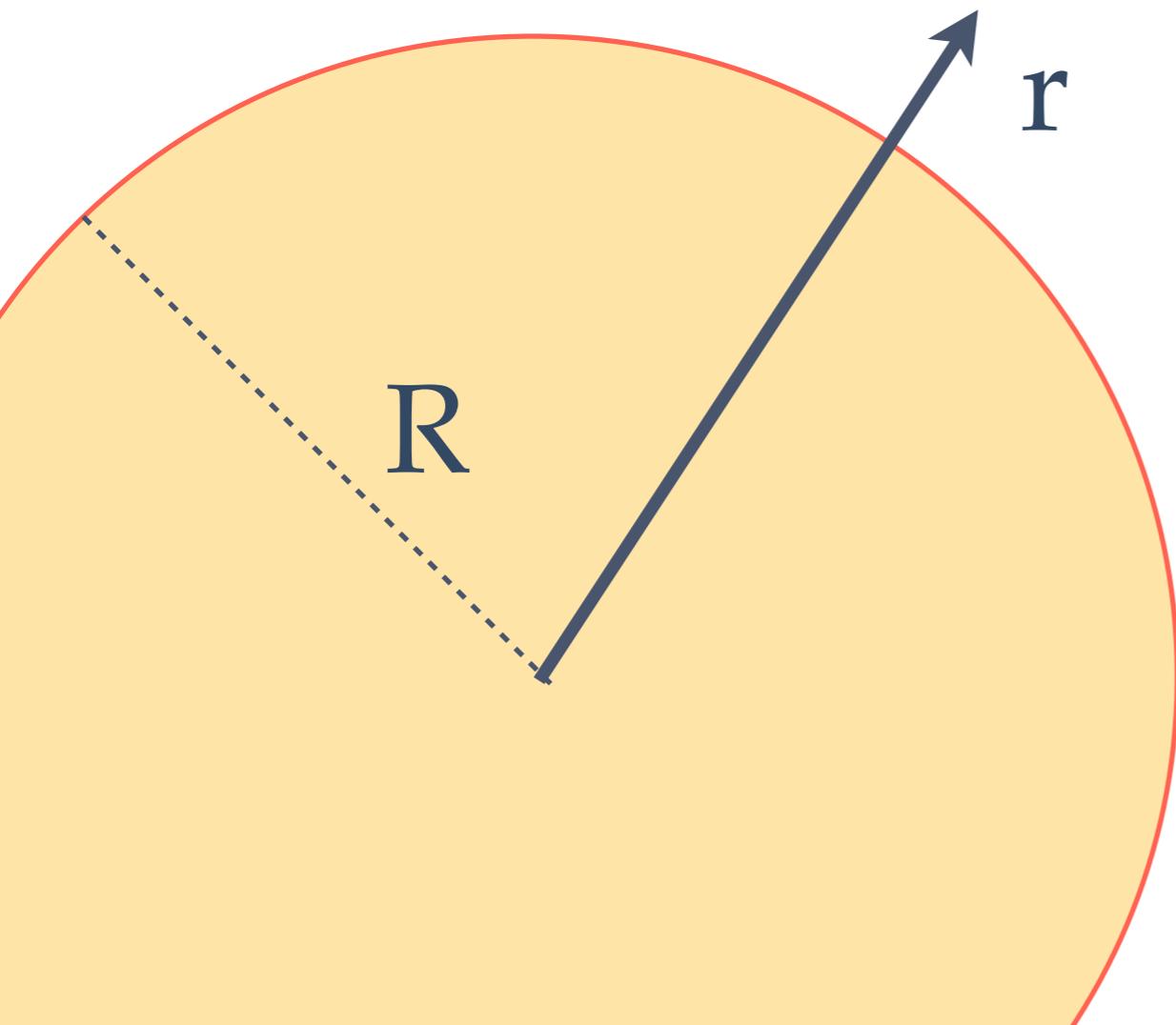
- Un objeto sujeto por auto-gravedad y que irradia la energía suministrada por una fuente interna propia



- Simetría esférica:
 - Descripción en 1D: dirección radial
 - Excepciones: estrellas con alta rotación o campos magnéticos fuertes
- Estructura:
 - Estado de las variables físicas que determinan el interior estelar (Presión, Temperatura, Densidad/Masa)
 - Modelo de estructura: Descripción de las variables T, P , densidad como función de la distancia radial al centro de la estrella y de los procesos físicos involucrados

Estructura Estelar

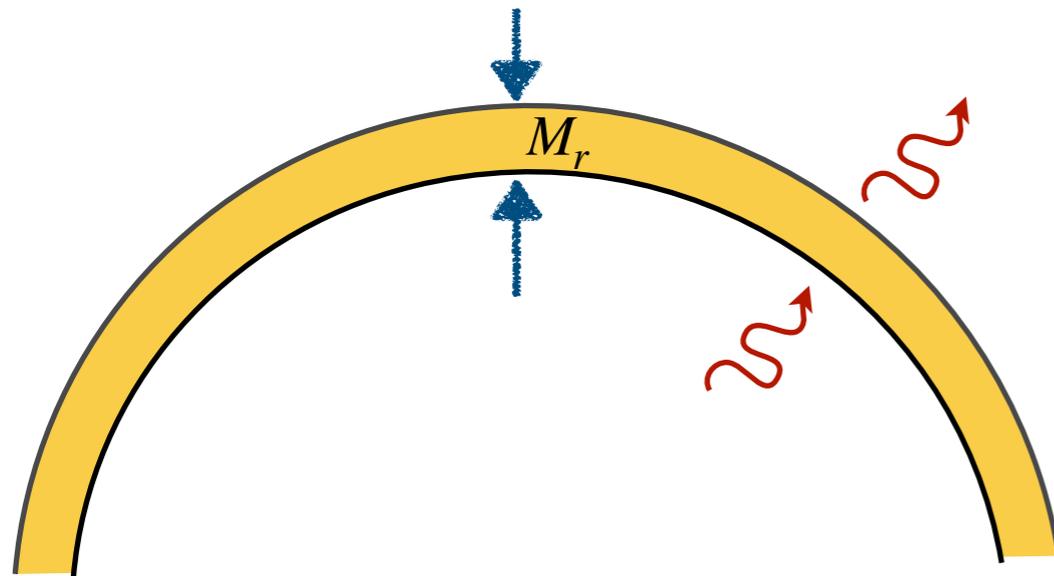
- Sabemos que los fotones que recibimos de una estrella provienen de su fotosfera (superficie), entonces...
- ¿Cómo sabemos cómo es la estructura interna?
 - Modelamos los procesos físicos que ocurren en el interior usando las leyes de la física que conocemos
 - Un modelo nos da una predicción de observables, en función de lo que ocurre en el interior
 - Comparamos estas predicciones con datos observados \rightarrow el mejor modelo es el que mejor reproduce las observaciones
 - Se hacen + predicciones con cada modelo, se refina el modelo



¿Porqué decimos que las estrellas evolucionan?

- **Empíricamente:** Se ha visto evolucionar a unas pocas estrellas (ej: supernovas)
- **Conceptualmente:** Las estrellas emiten energía y ésta no puede ser infinita.
- Por lo tanto, llegará el momento en que se agotará la fuente de energía y la estrella sufrirá cambios. Lo que queremos es entender ¿cuáles son, cómo y cuándo ocurren estos cambios?

Ingredientes de un modelo de estructura



Leyes de Conservación

- Ecuación de Continuidad (Conservación de la masa)
- Ecuación de Equilibrio Hidrostático (2º Ley de Newton)
- Ecuación de Equilibrio Térmico (Conservación de la Energía)

Producción de Energía

Ecuación de Estado

- Ecuación de Estado del Gas (depende del tipo de gas)

Ecuación de Transporte

- Ecuación de Equilibrio Térmico

**Leyes de conservación +
Producción de Energía +
Ecuación de estado +
Transporte
= Modelo de estructura**

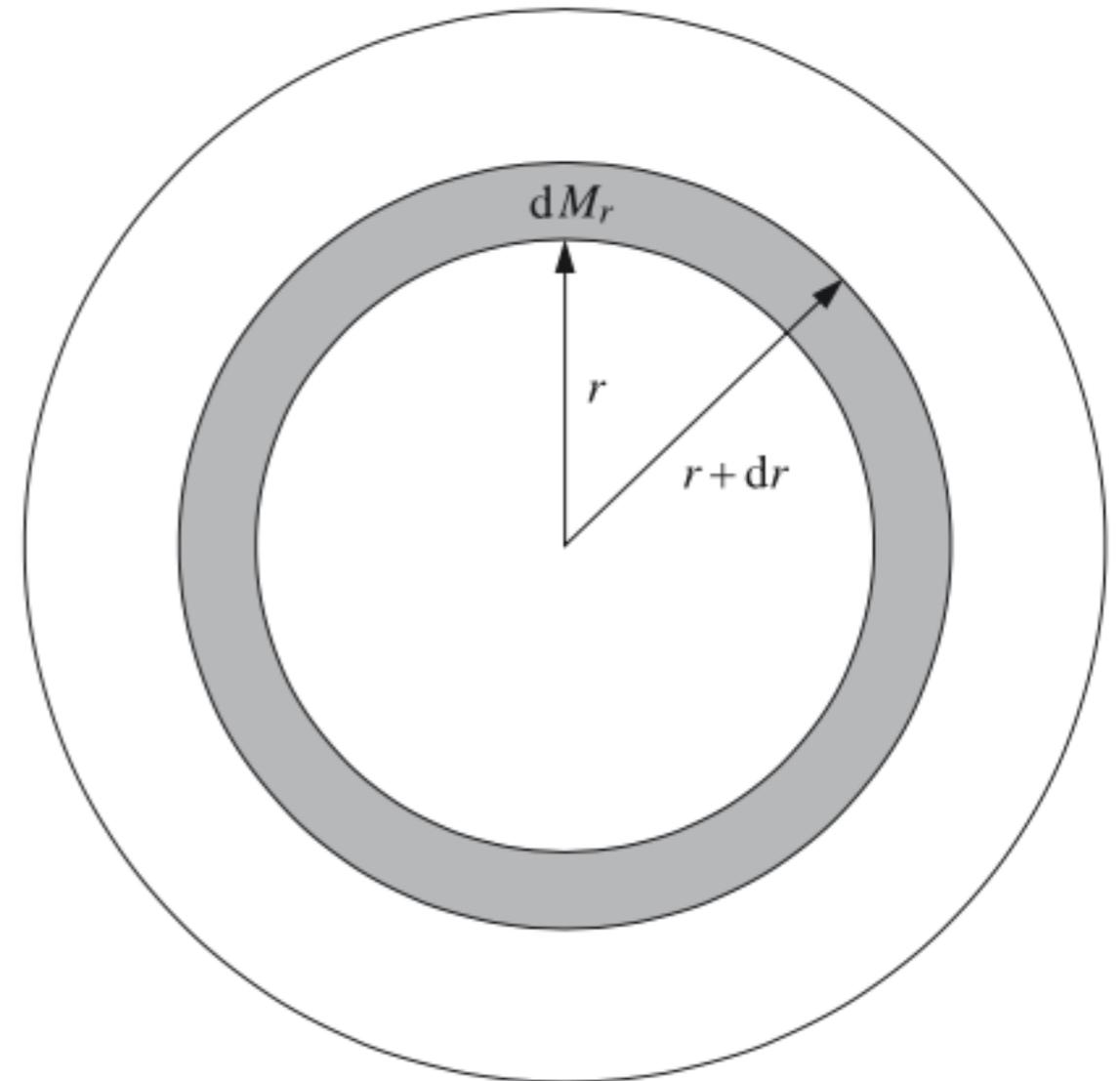
Ecuación de Continuidad

- Tomamos un cascarón de radio r y espesor dr en el interior de la estrella
- Tomemos M_r como la masa encerrada a un radio r , así la masa del cascarón es

$$dM_r = \rho(r)dV$$

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

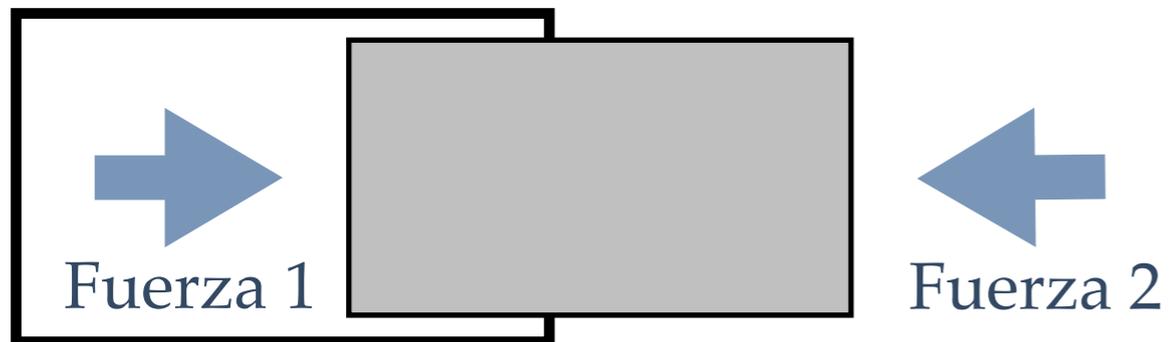
$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$



$\rho(r)$ es la densidad de masa

Equilibrio Hidrostático

- Una analogía útil es la de un pistón



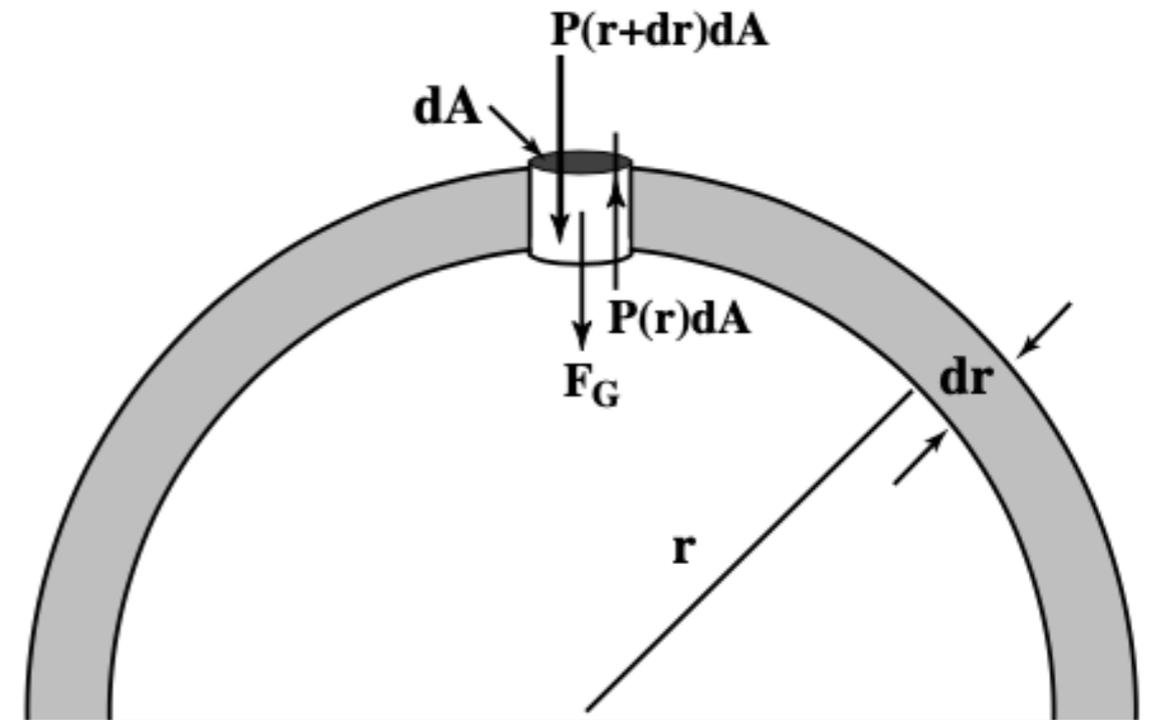
- Hagamos el balance de fuerzas para un elemento de masa dm , área dA y altura dr en el cascarón

- Éste siente una fuerza gravitatoria:

$$F_G = -\frac{GM_r dm}{r^2} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r) dA dr$$

- Y está sujeto a la presión de la capa más externa (hacia adentro) más la de la capa interna (hacia afuera)

$$F_B = P(r)dA - P(r + dr)dA = -dP dA$$



Equilibrio Hidrostático

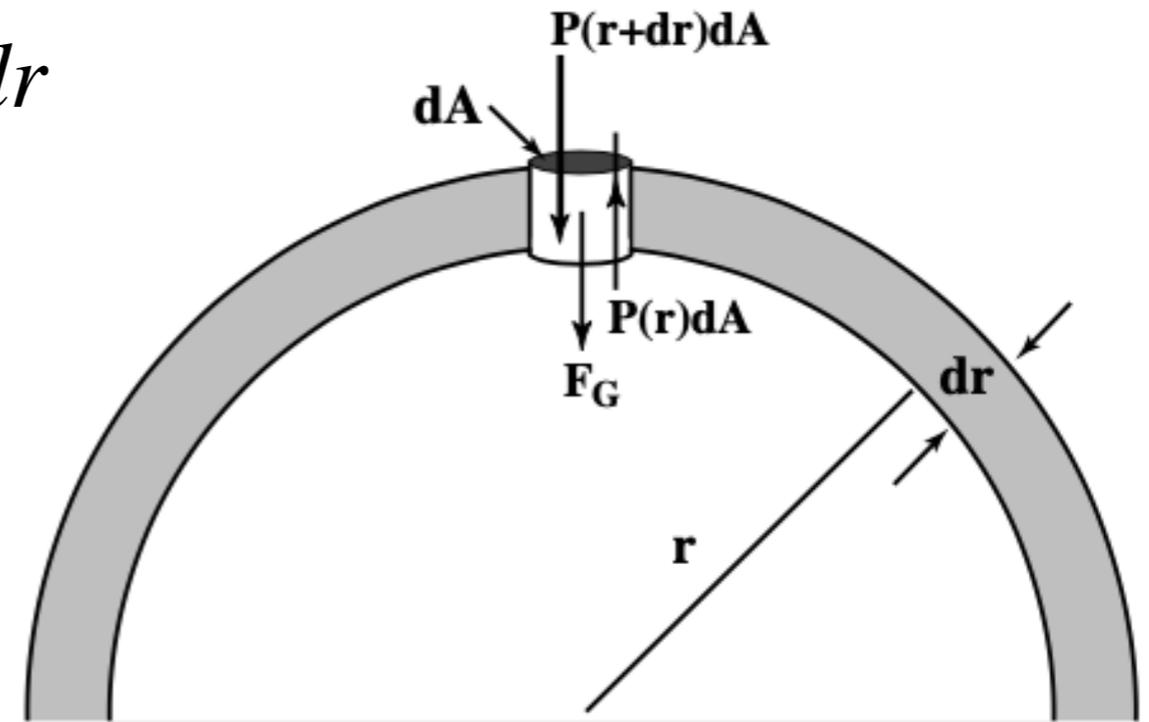
$$dF_G = -\frac{GM_r dm}{r^2} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r) dA dr$$

$$dF_B = -dP dA$$

- La condición de Equilibrio es que la fuerza neta total sea nula:

$$dF_G + dF_B = 0$$

$$-\frac{GM_r}{r^2} \rho(r) dA dr - dP dA = 0$$



Ecuación de Equilibrio Hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r)$$

$\rho(r)$ creciente hacia el centro =>
gradiente de presión positivo
(hacia afuera)

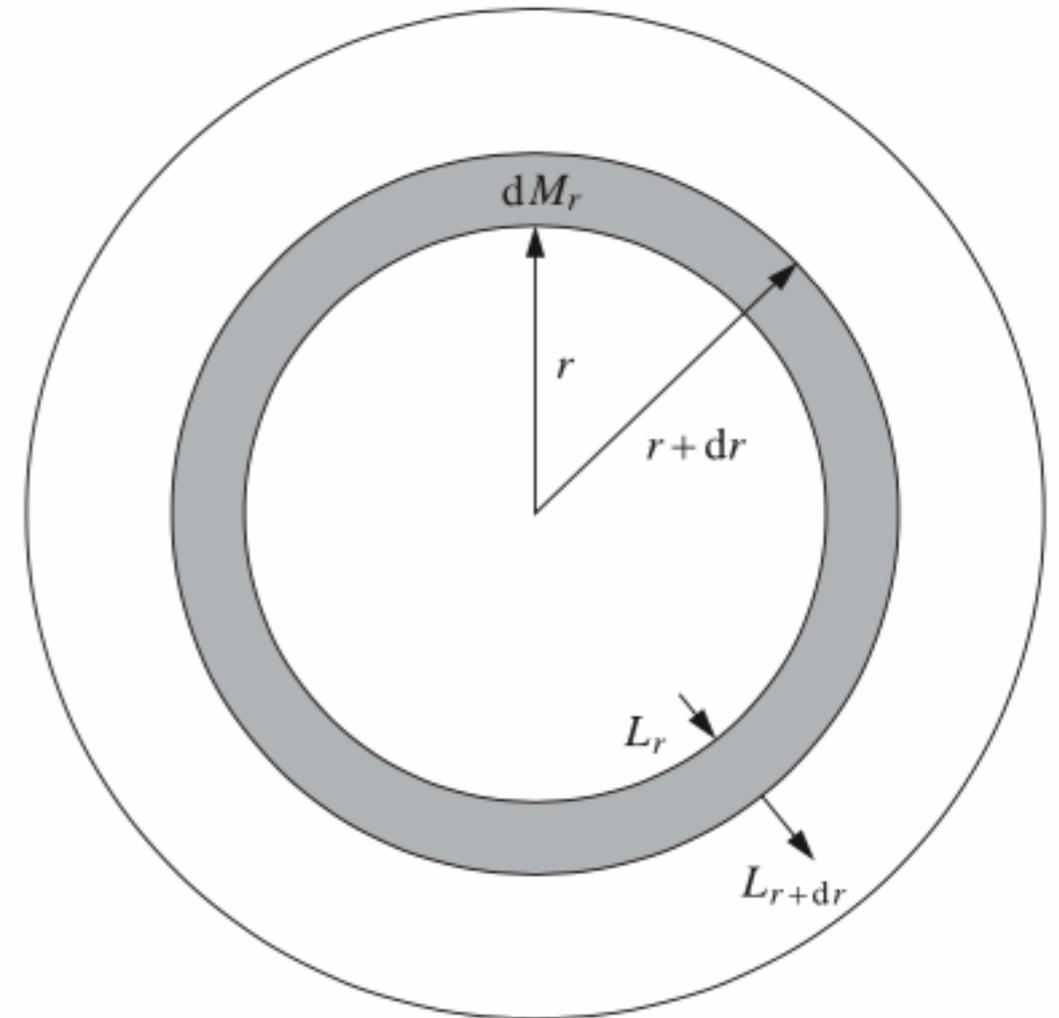
Equilibrio Térmico y Producción de energía

- Conservación de la energía => la energía producida en el interior con una tasa de producción de energía $\varepsilon(r)$ por unidad de masa, y ésta va hacia la superficie y es radiada hacia afuera

$$dL_r = L(r + dr) - L(r) = \varepsilon dM_r$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \rho(r)$$



de la física nuclear

La energía se produce casi exclusivamente en el núcleo así que L_r es casi constante

Ecuación de Transporte

- Ésta ecuación nos dará el cambio de Temperatura con el radio, i.e. el *gradiente de Temperatura*
- La forma de la ec. depende de cuál es mecanismo de transporte. Hay tres posibles: *conducción*, **radiación o convección** (la *conducción es muy ineficiente en estrellas normales*-> sólo importante en obj. compactos)
- Cuál es el mecanismo de transporte dominante depende de P y ρ . Un estrella puede tener un interior **totalmente convectivo** (estrellas de baja masa $M < 0.5 M_{\text{sol}}$), **mixto con una zona radiativa y otra convectiva** (estrellas como el Sol), o **totalmente radiativo** (estrellas masivas $M \gtrsim 5 M_{\odot}$)



Radiación



Convección

Ecuación de Transporte: Transferencia Radiativa

Energía radiada por una capa de radio r :

$$F(r) = \sigma T^4 \quad dF(r) = 4\sigma T^3 dT \quad (1)$$

para un medio con una opacidad $\kappa(r)$ dada, la ec. de transferencia radiativa es:

$$dF(r) = -\kappa(r)\rho(r)F(r)dr$$

opacidad $\kappa(r)$ = cuánta radiación es absorbida por unidad de masa (Ver Cap. 5 Kartunnen, Ec. 5.44)

sustituyendo (1) y $F(r)$ en términos de la luminosidad L_r :

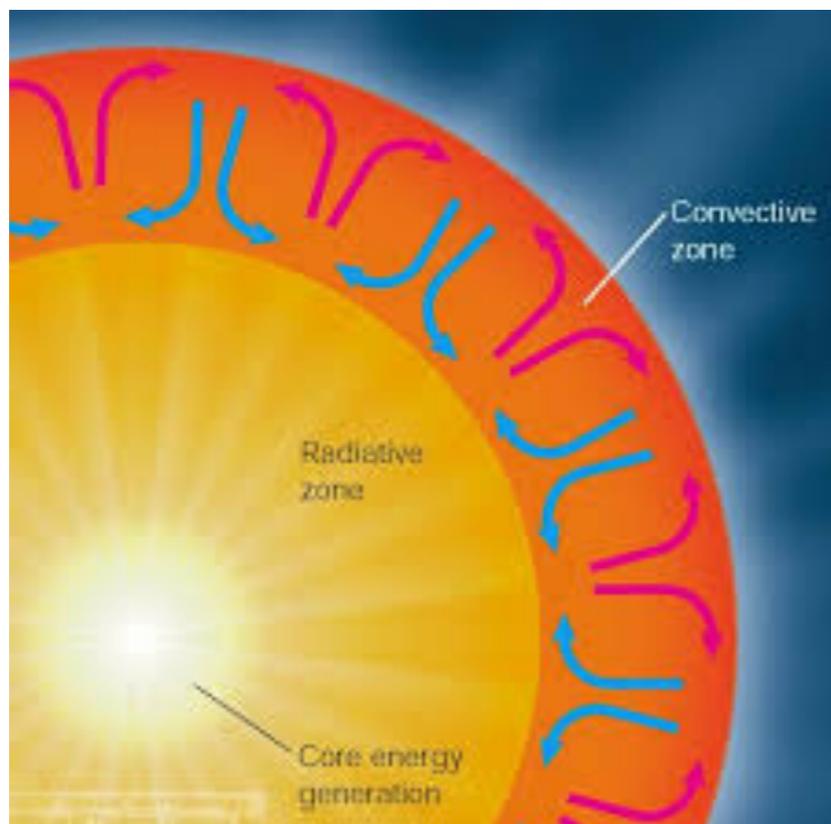
$$4\sigma T^3 dT = -\kappa(r)\rho(r)\frac{L_r}{4\pi r^2}dr$$

$$L_r = -\frac{16\pi r^2 \sigma T(r)^3}{\kappa(r)\rho(r)} \frac{dT}{dr}$$

Para que la estrella radíe tiene que haber un gradiente de T negativo (T aumenta hacia el centro)

Ecuación de Transporte: Transferencia Convectiva

- Cuando la transferencia radiativa es ineficiente el transporte se vuelve **convectivo**
- Movimientos macro del gas en el que celdas/burbujas de gas caliente suben hacia capas más altas y frías, caléntandolas y perdiendo energía, haciendo que vuelvan a *sumergirse* (*bajar hacia el centro*)



$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

γ se llama exponente adiabático, depende del calor específico del gas a P y V constante

Ingredientes de un modelo de estructura

Leyes de Conservación

- Ecuación de Continuidad (Conservación de la masa) $\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$

- Ecuación de Equilibrio Hidrostático (2° Ley de Newton) $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r)$

- Ecuación de Equilibrio Térmico (Conservación de la Energía)

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \rho(r)$$

Producción de Energía

Sistema acoplado de ec. diferenciales

Ecuación de Estado

- Ecuación de Estado del Gas (depende del tipo de gas)

Ecuación de Transporte

- Ecs. Transferencia radiativa/convectiva

$$L_r = -\frac{16\pi r^2 \sigma T(r)^3}{\kappa(r) \rho(r)} \frac{dT}{dr} \quad \frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

**Leyes de conservación +
Producción de Energía +
Ecuación de estado +
Transporte**

= Modelo de estructura

Ecuación de Estado

- Ésta ecuación relaciona la Presión, Temperatura y Densidad del gas
- Hay diferentes Ecuaciones de Estado que rigen gases en diferentes condiciones de P, T y densidad

- **Gas Ideal** (gas en el que las partículas no interactúan entre sí)

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T$$

- Válido en el interior del sol, fotosfera e interiores de la mayoría de las estrellas
- A temperaturas muy altas hay que sumar la contribución de la presión de radiación $P_{rad} = aT^4/3$ (los fotones ejercen presión por intercambio de momento)

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T + \frac{1}{3} a T^4$$

Ecuación de Estado

- A muy altas densidades los gases se pueden volver degenerados
- El Principio de Exclusión de Pauli (Mec. Cuántica) implica que dos fermiones no pueden estar en el mismo lugar y tener los mismos números cuánticos, i.e. tener el mismo momentum => un cierto N de fermiones en un volumen ocupará todos los estados de momentum posibles hasta cierto valor máximo (Momento de Fermi)

- **Gases de electrones degenerados (relativista y no-relativista)**

$$P \approx \left(\frac{h^2}{m_e} \right) \left(\frac{\rho}{\mu_e m_H} \right)^{5/3}$$

- ejemplos: Enanas blancas, interior de enanas marrones

- **Gases de Neutrones degenerados**

- ejemplos: Estrellas de Neutrones y Púlsars

Ingredientes de un modelo de estructura

Leyes de Conservación

- Ecuación de Continuidad (Conservación de la masa) $\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$

- Ecuación de Equilibrio Hidrostático (2° Ley de Newton) $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r)$

- Ecuación de Equilibrio Térmico (Conservación de la Energía)

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \rho(r)$$

↑
Producción de Energía

Ecuación de Estado

Gas Ideal e- degenerados
n degenerados

Ecuación de Transporte

- Ecs. Transferencia radiativa/conectiva

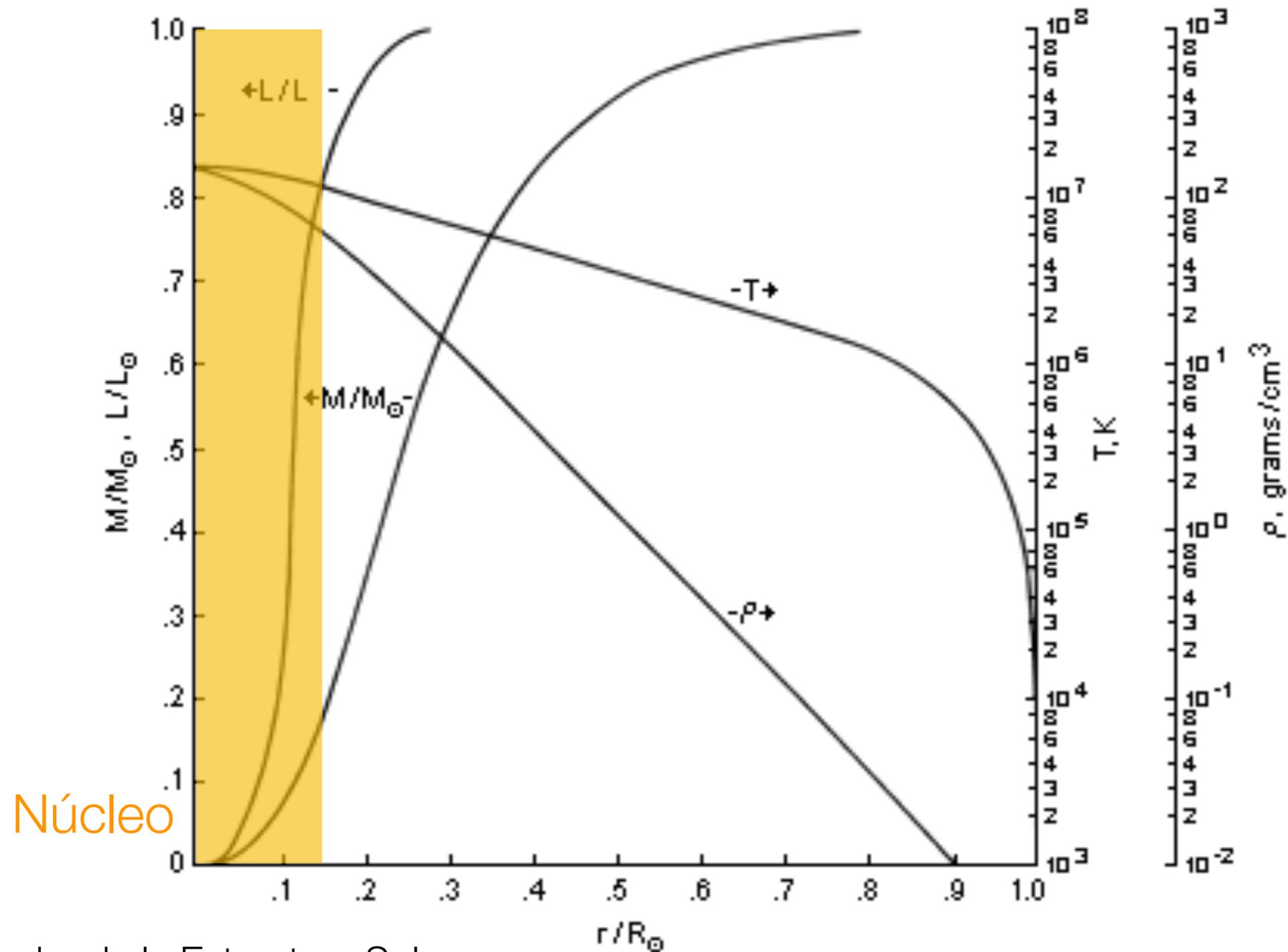
$$L_r = -\frac{16\pi r^2 \sigma T(r)^3}{\kappa(r) \rho(r)} \frac{dT}{dr} \quad \frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

**Leyes de conservación +
Producción de Energía +
Ecuación de estado +
Transporte
= Modelo de estructura**

Interior Estelar

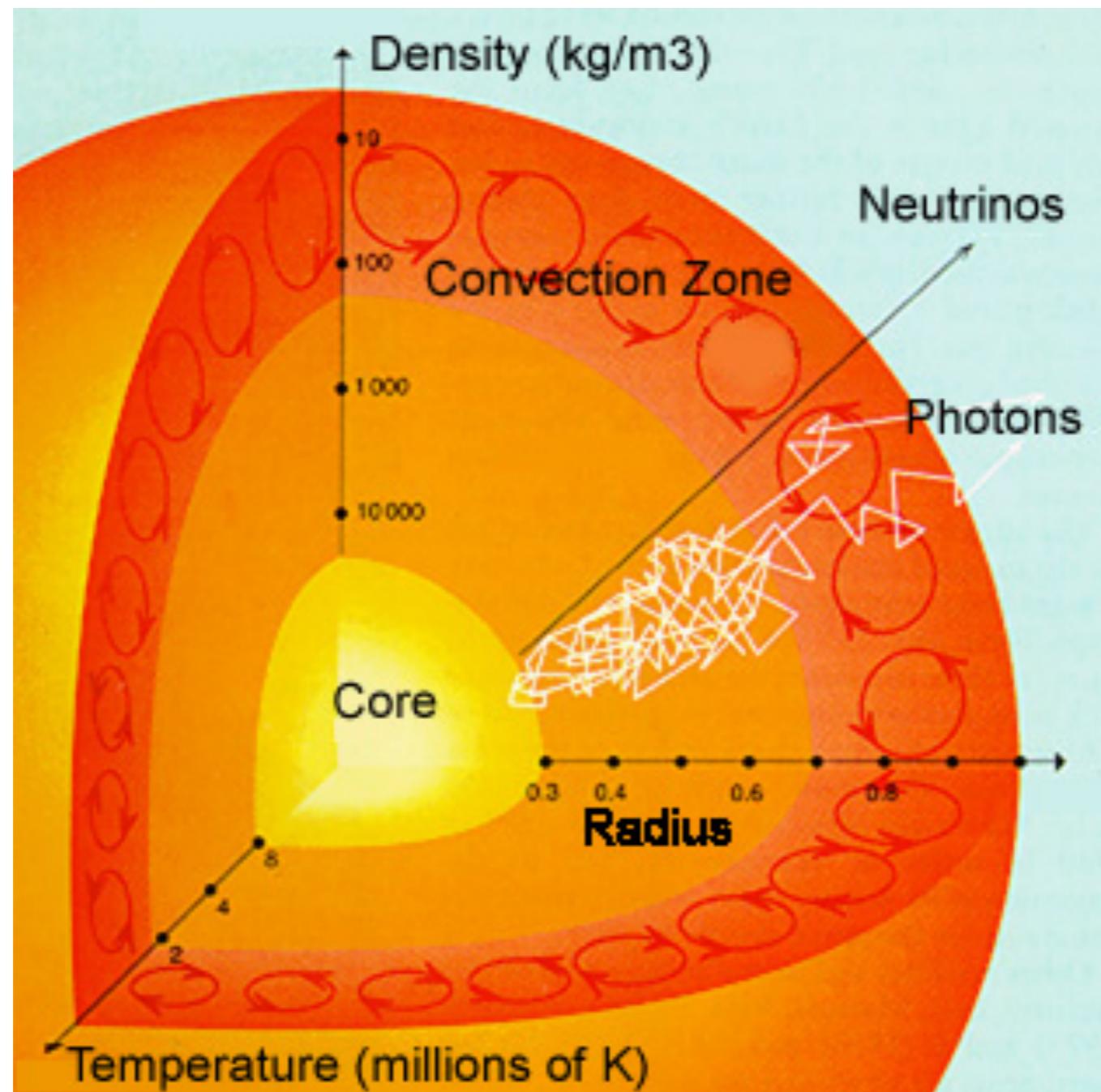
Estructura Interna: El Sol

- El conjunto planteado de ecuaciones diferenciales no se puede resolver analíticamente — —> resolución numérica (un caso “simple”: enanas blancas)



Estructura Interna: El Sol

- El conjunto planteado de ecuaciones diferenciales no se puede resolver analíticamente — —> resolución numérica (un caso “simple”: enanas blancas)



Fusión Nuclear

Producción de Energía

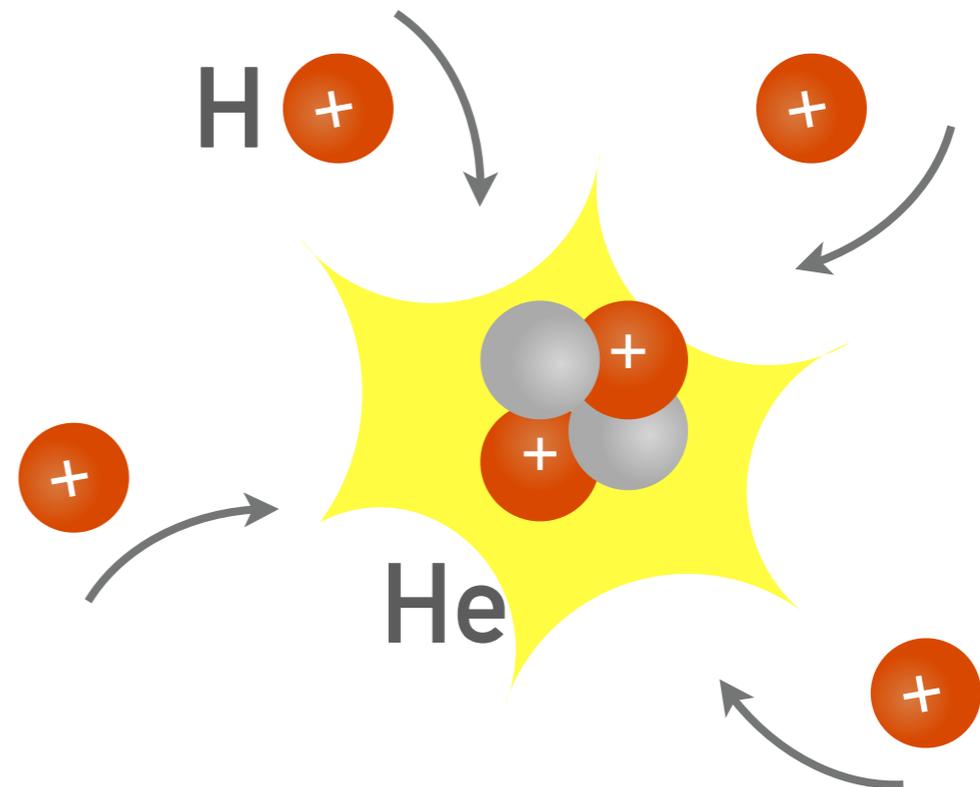
- ¿Qué mecanismo es responsable de la producción de energía?
- Jeans: No puede ser sólo liberación de la energía potencial acumulada -> da un tiempo de vida muy corto para el Sol (tiempo de caída libre ~)
- Tiene que haber un mecanismo interno de producción de energía

Fusión Nuclear

Pero dos cargas del mismo signo se repelen

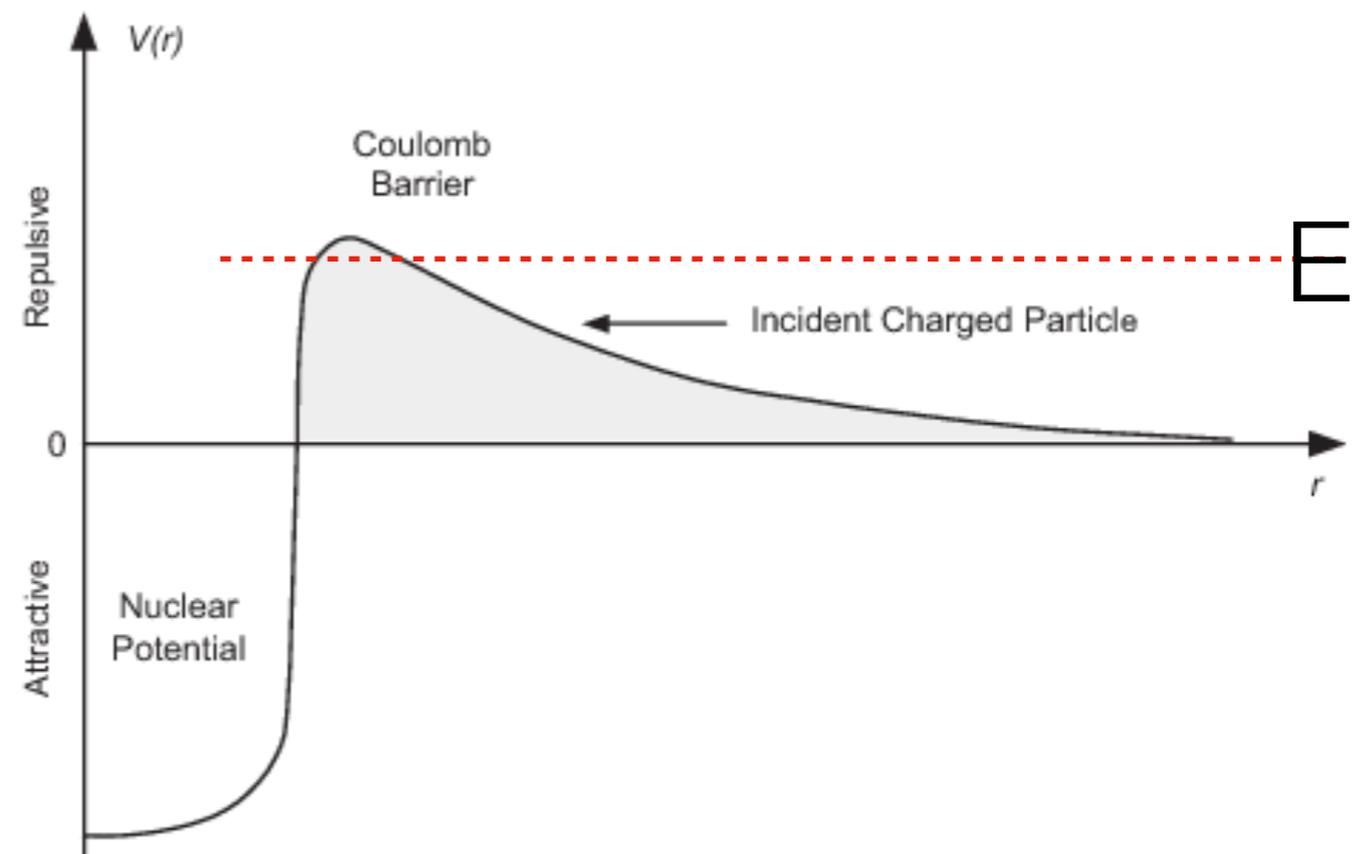
$$F_e \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

¿cómo vencer esta “Barrera de Coulomb?”



Modelos: Estructura + Atmósfera

- La Fuerza Nuclear Fuerte es la que mantiene unidas a las partículas en los núcleos atómicos (protones carga=+ y neutrones carga=0)
- Efecto túnel cuántico: una partícula de Energía menor a la de la barrera de Coulomb tiene una probabilidad (pequeña) no nula de “aparecer” del otro lado de la barrera
- En el caso clásico esto no puede pasar
- En el caso cuántico sí (efecto túnel), la probabilidad de que ocurra es alta para las partículas de mayor energía a una temperatura dada



— -> Fusión Nuclear

¿Cuánta energía se produce?

- La cota máxima de la energía producida sería si los 4 núcleos de H se combinaran para formar 1 de He

$$4m_p - m(^4\text{He}) = 0.007(4m_p)$$

- En ese caso el excedente de energía sería 0.7% de la masa inicial (la de los 4 protones) disponible para que ocurra la fusión
- Pero la fusión no ocurre en todo el Sol, sólo en su núcleo. Sabemos que ~10% de la masa total del sol está en la zona en la que puede ocurrir la fusión (núcleo). Con esto podemos estimar cuánto tiempo tardaría el sol en consumir el combustible disponible para la fusión de H (Escala de tiempo nuclear)

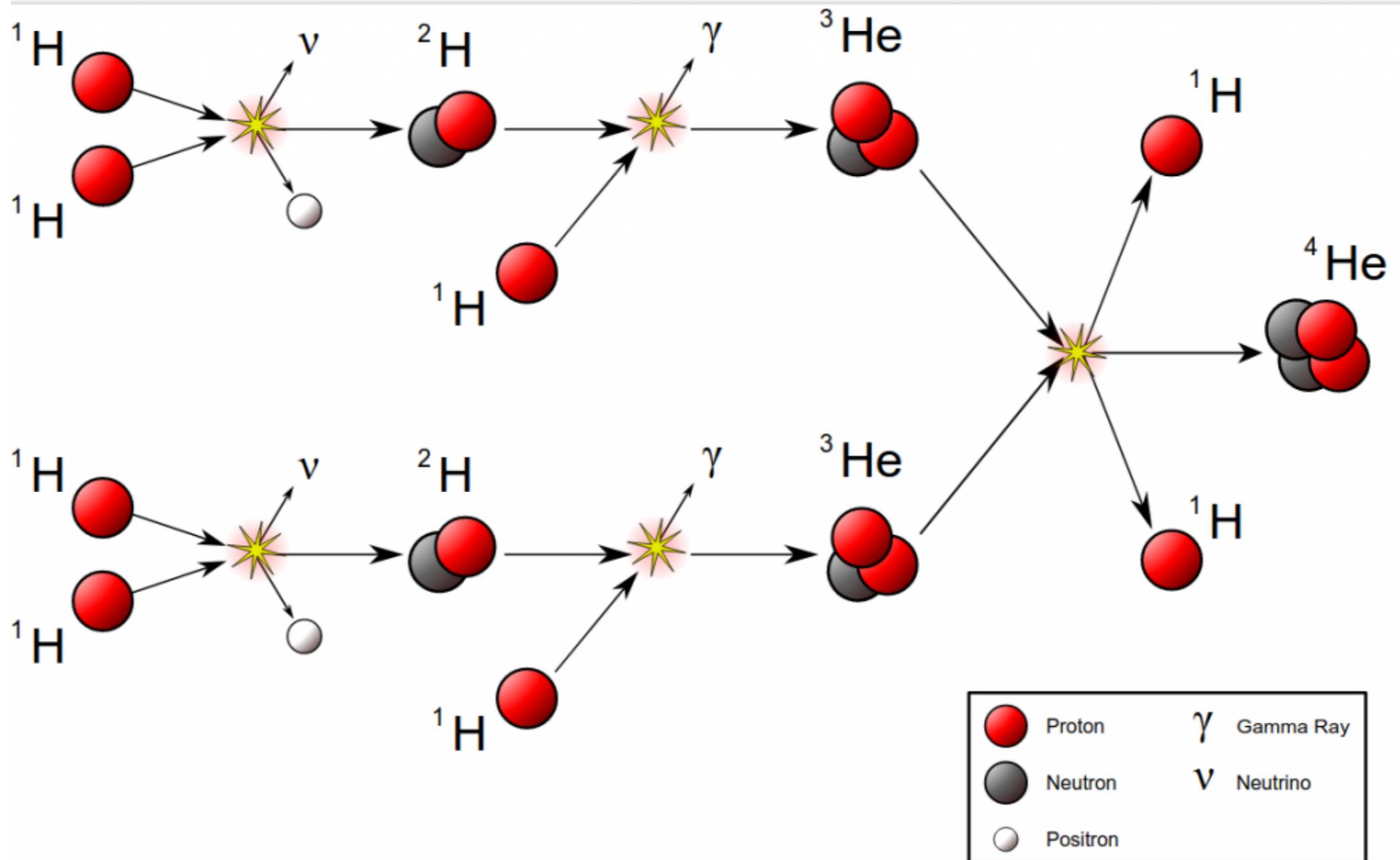
$$t_{nuclear} = E/L = Mc^2/L = 0.007 \times \left(\frac{0.1M_{\odot}}{L_{\odot}} \right) c^2 \approx 10^{10} \text{ años}$$

estimado del tiempo de vida del Sol

- Nota: En realidad se produce menos energía porque no se combinan 4 protones directamente sino a través de una serie de reacciones que ahora veremos

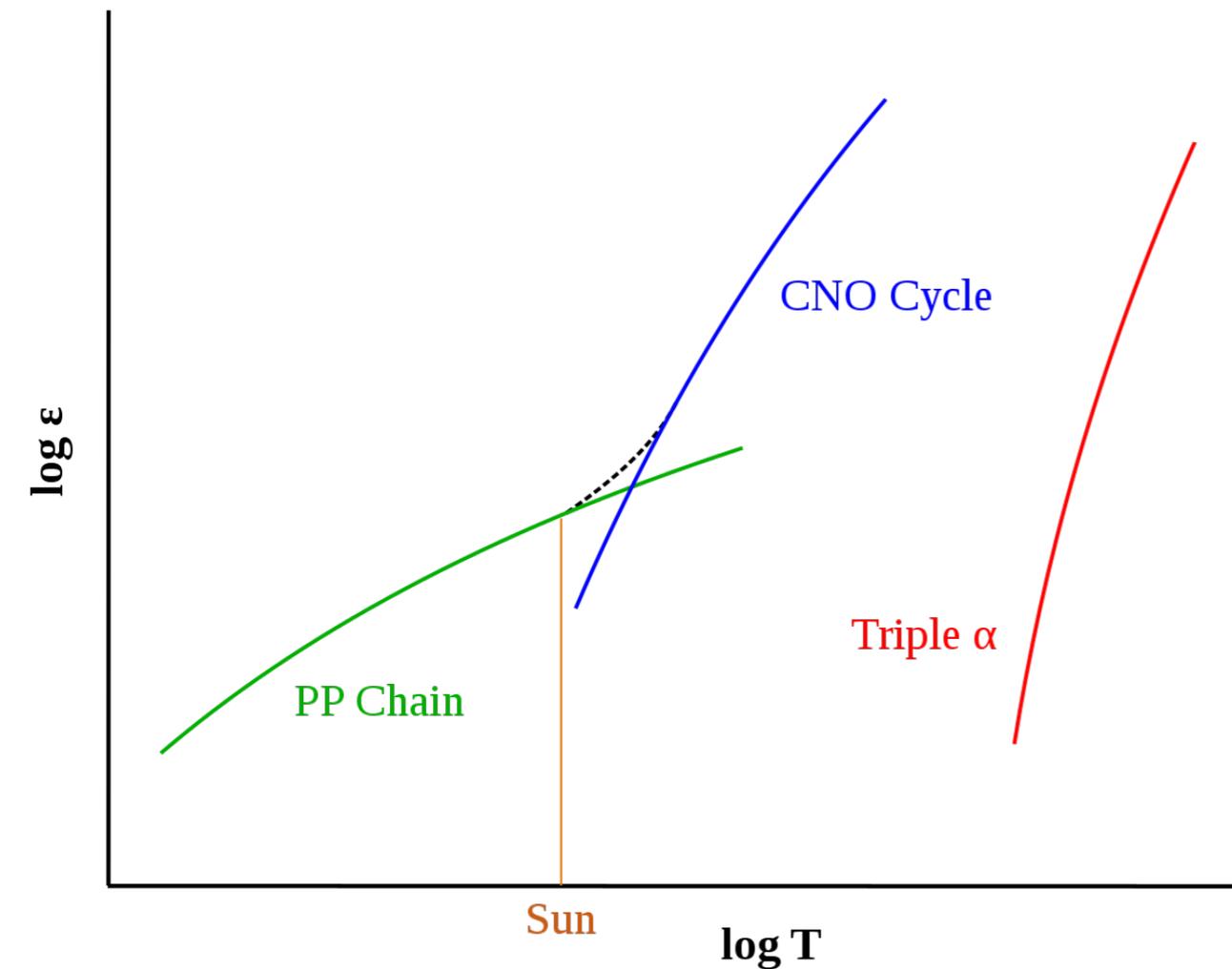
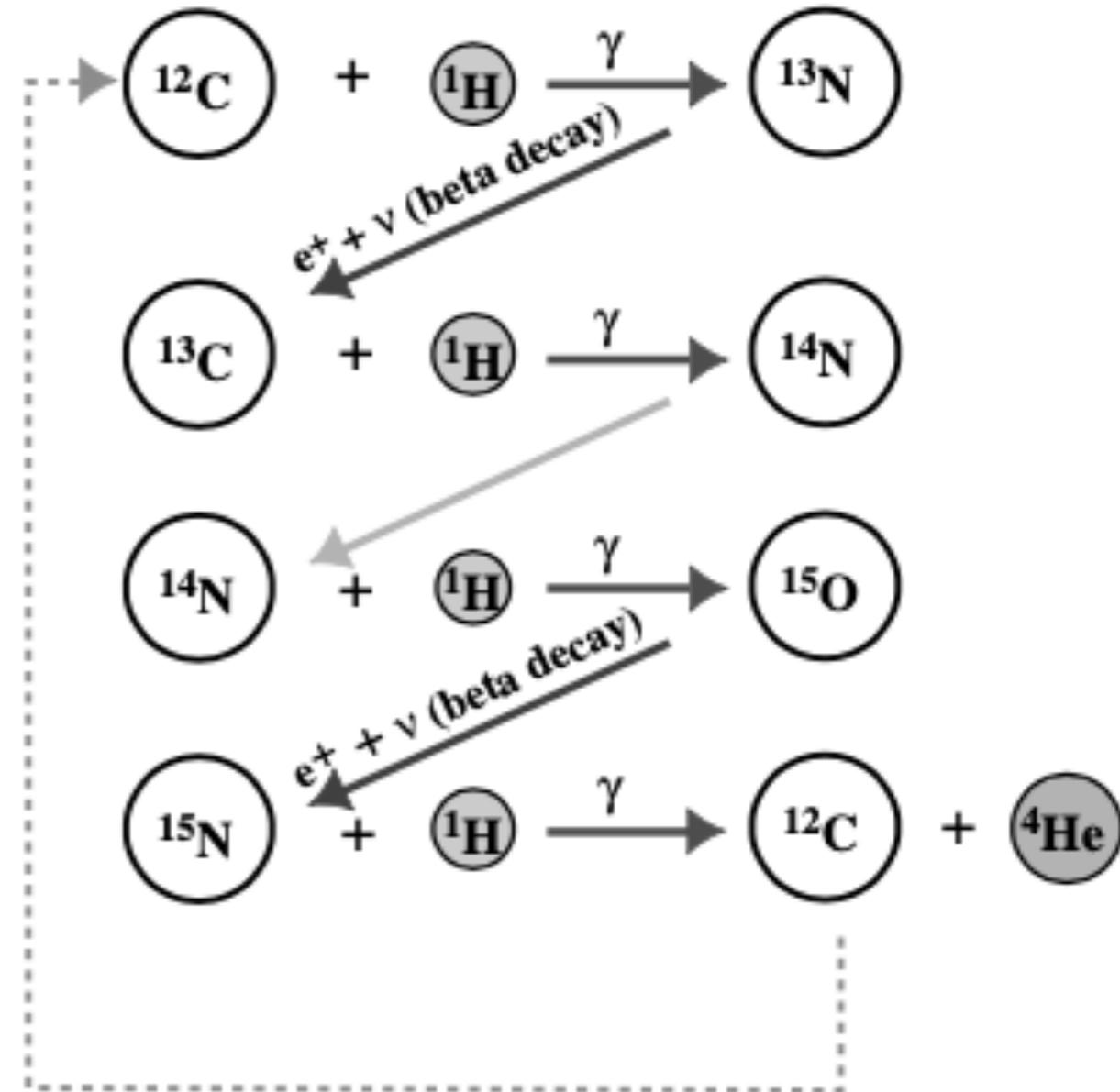
Fusión de H en He: Cadena p-p ó protón-protón

- 4 núcleos de H se combinan mediante una serie de reacciones para formar ${}^4\text{He}$ (estable)
- Éste es el mecanismo principal en estrellas como el Sol

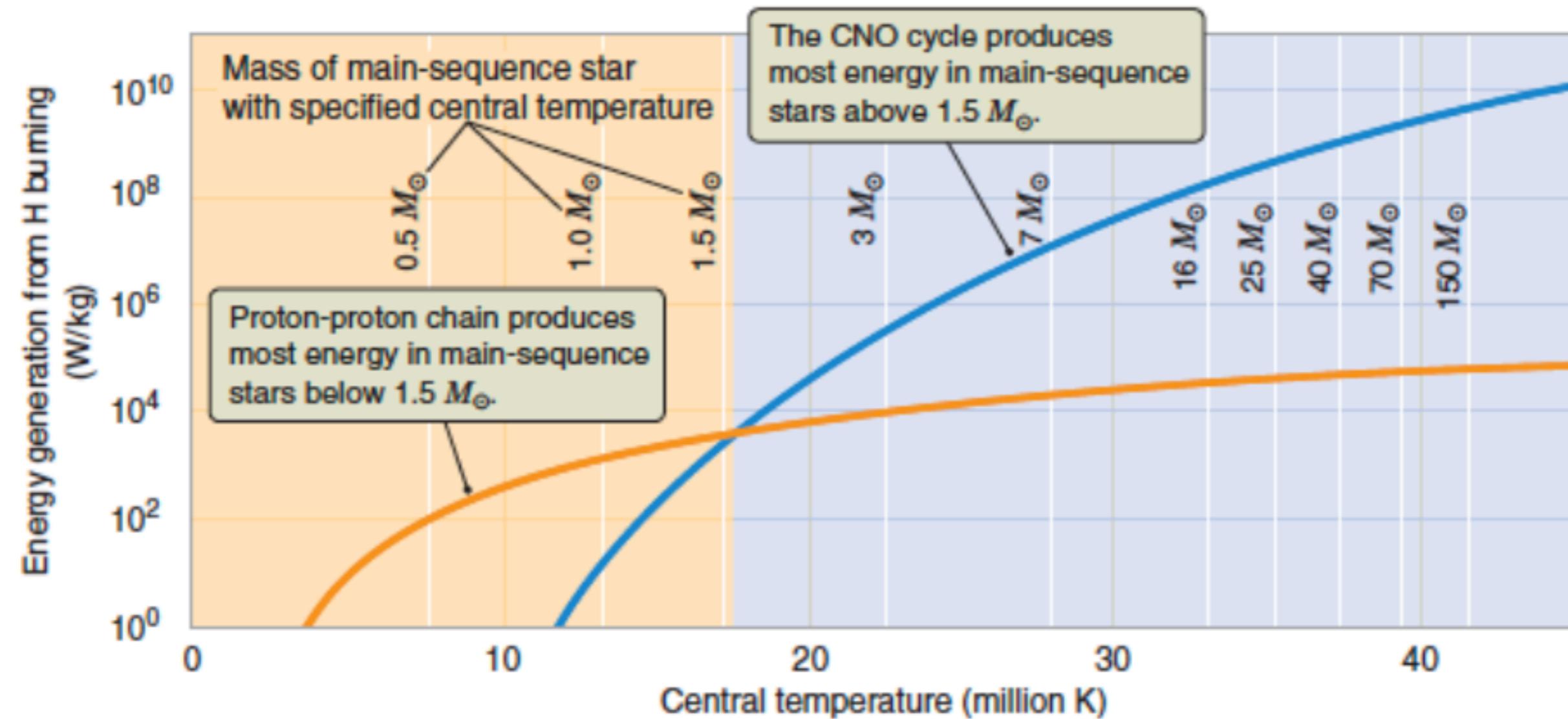


Fusión de H en He: Ciclo CNO

- C, N y O actúan como catalizadores en la fusión de H en He
- Este ciclo es prevalente en estrellas masivas/calientes



Fusión de H en He



Otras fuentes de energía

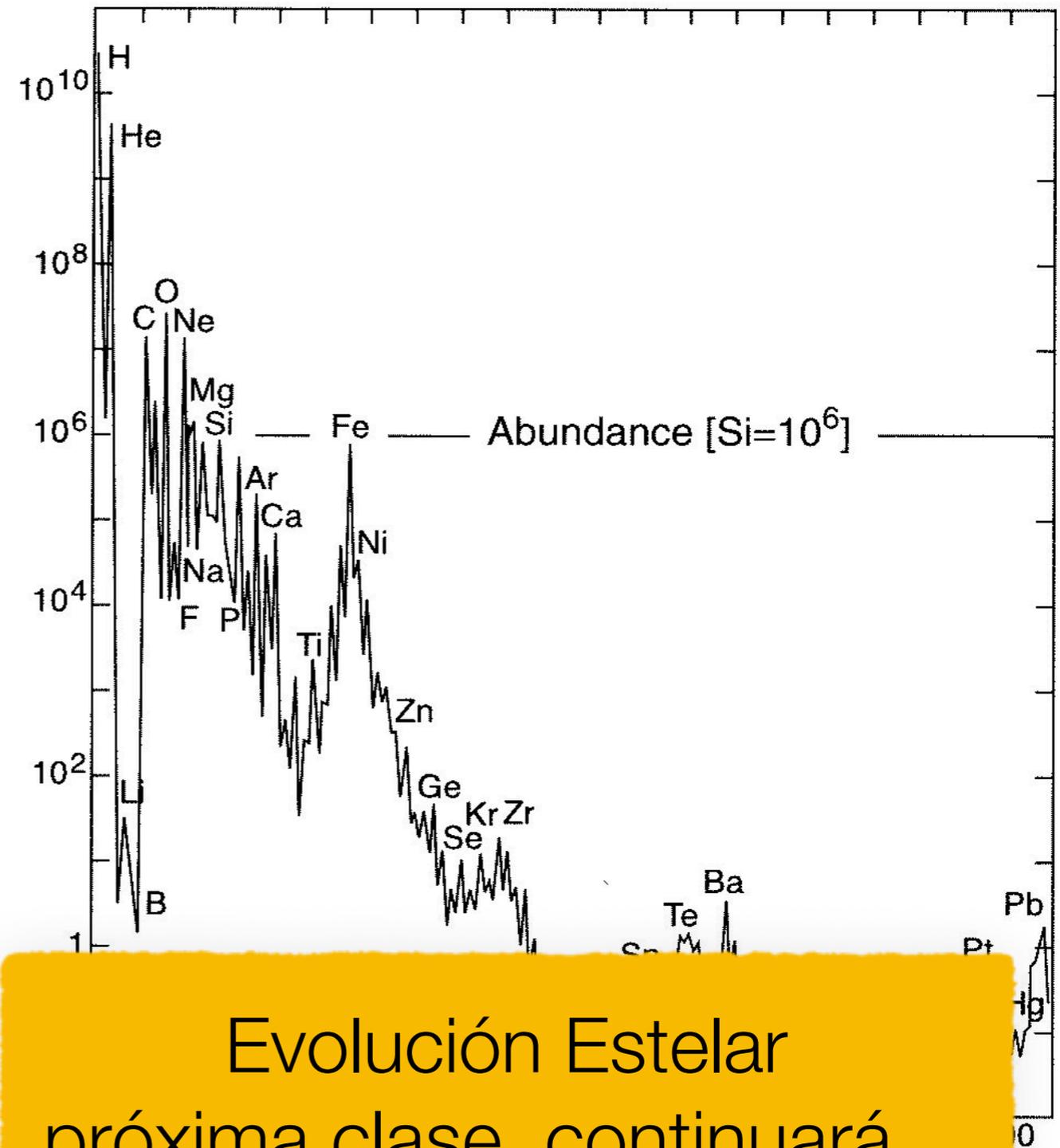
- **La fusión de H en He es la fuente de energía de las estrellas en la Secuencia Principal, la etapa más duradera de la vida de una estrella**
- Eventualmente se agota el H en el núcleo, deteniéndose la fusión. Cuando esto ocurre la estrella comienza evolucionar.
- La estructura cambia hasta que se alcanza condiciones para la quema (fusión) de otros elementos (usualmente acompañado de quema de H en zonas reducidas)
 - — —> la estrella evoluciona

Evolución Estelar
próxima clase, continuará...

llegamos hasta aquí...

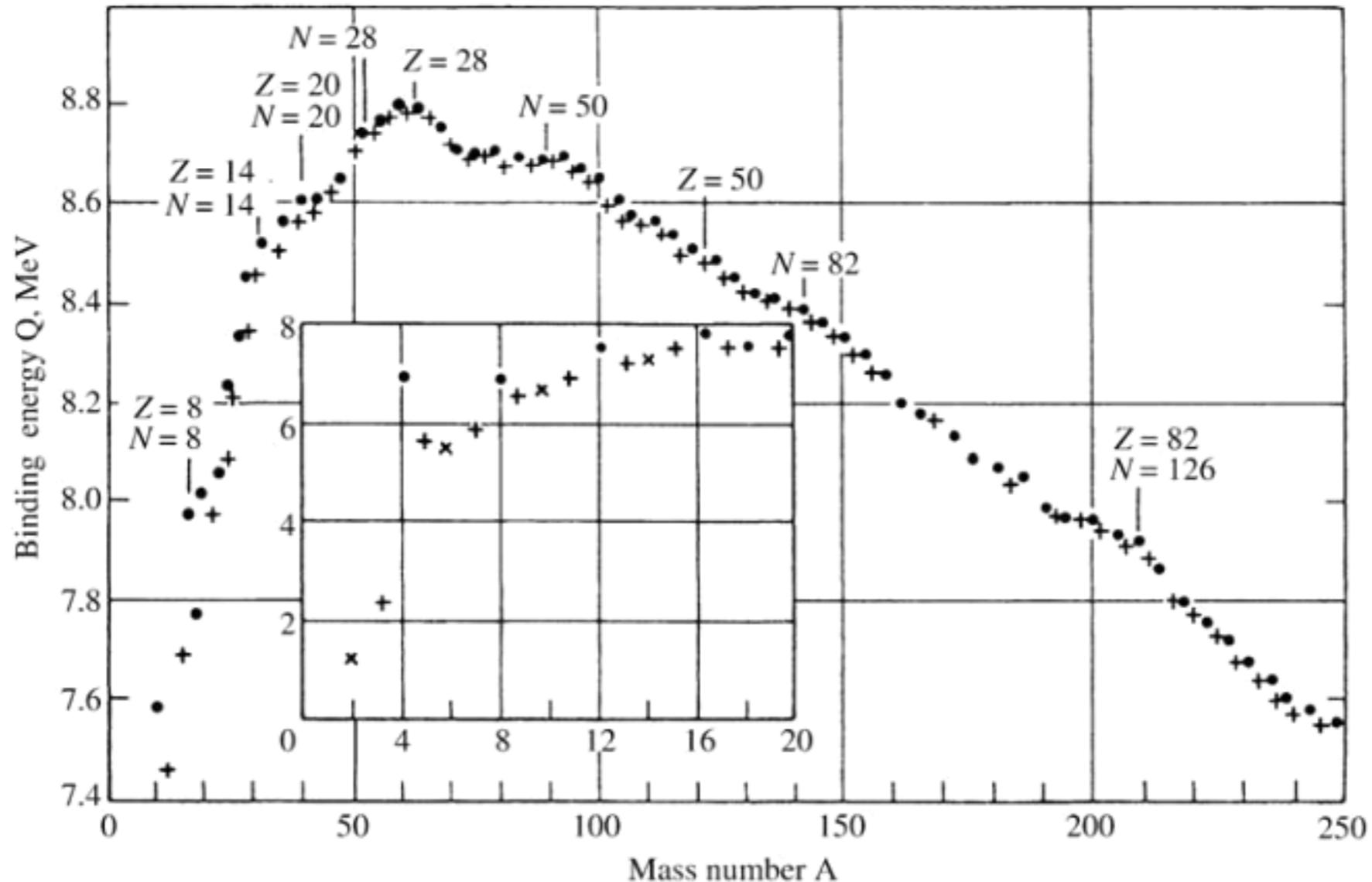
Otras fuentes de energía: Quema de elementos pesados

- La fusión de elementos más pesados que H requiere T y densidad cada vez mayores más difíciles de alcanzar
- Además, el elemento más abundante es el H:
 - Típicamente 70% H, 22-25% He, <5% "metales" = el resto
 - Def: en astronomía (mal) llamamos *metales* a los elementos más pesados que el He
- Así, las etapas de quema estable de elementos pesados tienen una duración muchíííísimamente menor que la de la quema de H (Secuencia Principal)



Otras fuentes de energía: Quema de elementos pesados

- Otros procesos de fusión:
 - Fusión o quema de He (reacción Triple-Alpha)
 - Fusión de C,N,O, Si \rightarrow hasta Fe



Bibliografía

- Kartunnen Cap. 10
- Kutner Cap. 9