Electromagnetismo (2021)

Práctico 3

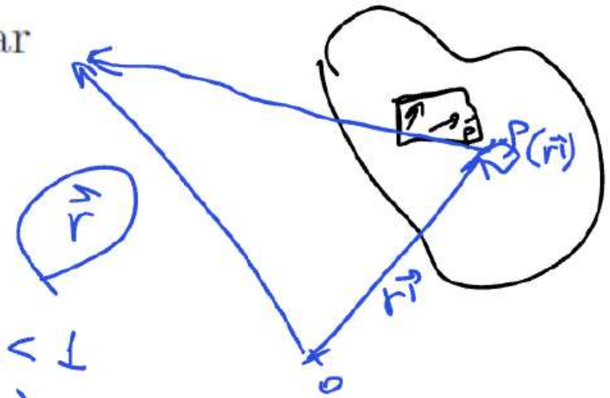
Dipolos y Desarrollo Multipolar

$\vec p = q\vec d$

$\underbrace{\vec P = \int \rho(\vec r')\,\vec r'\,d^3\vec r'}$

$\vec P \propto \vec E$

$\frac{d\vec P}{dV}$



$\frac{r'}{r} \ll 1$

cuadrupolo

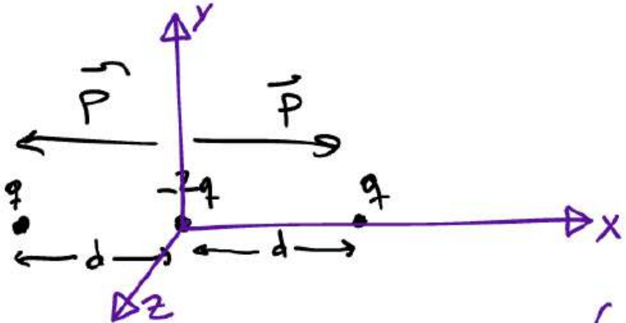
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\, d^3\vec r'}{|\vec r-\vec r'|} \approx \frac{\int \rho\, d^3\vec r'}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec r\cdot\widetilde{\int \rho(\vec r')\,\vec r'\,d^3\vec r'}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{\vec r\cdot Q\cdot\vec r^{T}}{8\pi\varepsilon_0 r^5} + o\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)$$

4. Hallar los momentos multipolares y la aproximación multipolar del potencial (hasta el cuadripolo) de las siguientes distribuciones discretas de cargas, considerando $qd = p = cte$ cuando $d \to 0$.

a) Distribución lineal formada por una sucesión de cargas puntuales a igual distancia d, en el siguiente orden: q,$-2q$,q y otra dada por la sucesión $-q$,$3q$,$-3q$,q.

b) Distribución plana constituida por cuatro cargas: dos de valor q y dos de valor $-q$, situadas alternadas en los vértices de un cuadrado de lado d. Hallar el potencial en los puntos del plano cuadrado.

a)



$$q_{neta} = 0 = \int \rho \, d^3\vec{r}\,' = \sum q's \quad \left(= q\left[1 + 1 - 2\right]\right)$$

$$\rho(\vec{r}\,') = q\left[\delta(\vec{r}\,' - d\hat{i}) + \delta(\vec{r}\,' + d\hat{i}) - 2\,\delta(\vec{r}\,')\right]$$

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,'\,d^3\vec{r}\,' = \int q\vec{r}\,'\delta(\vec{r}\,' - d\hat{i})\,d^3\vec{r}\,' + \int q\vec{r}\,'\delta(\vec{r}\,' + d\hat{i})\,d^3\vec{r}\,' - \int 2q\vec{r}\,'\delta(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,'$$

$$= \cancel{q d\hat{i}} \quad + \cancel{q(-d\hat{i})} \quad + -2q\,(\vec{0})$$

$$\Rightarrow \vec{p} = 0$$

$\Rightarrow r = 0$

Cuadrupolo

dens. de carga

$$Q_{ij} \equiv \int \rho(\vec{r}\,') \left[3 r_i' r_j' - r'^2 \delta_{ij} \right] d^3\vec{r}\,'$$

dens. de masa

$$\left(\mathbb{I}_{ij,0} = \int \rho(\vec{r}\,') \left[r'^2 \delta_{ij} - r_i' r_j' \right] d^3\vec{r}\,' \right)$$

$$Q_{xx} = \int q\,\delta(\vec{r}\,' - d\hat{i}) \left[3x'x' - r'^2 \right] d^3\vec{r}\,' + \int q\,\delta(\vec{r}\,' + d\hat{i}) \left[3x'x' - r'^2 \right] d^3\vec{r}\,'$$

$$-2 \underbrace{\int q\,\delta(\vec{r}\,') \left[3x'x' - r'^2 \right] d^3\vec{r}\,'}_{} = q\,2d^2 + q\,2d^2 + 0$$

equivale a evaluar f $\left(\int f \delta \right)$

en $\vec{r}\,' = 0 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$x' = 0$ $\quad$ $r' = 0$

$\delta_{xz} = \delta_{xy} = 0$ y además $y' = z' = 0$ para las cargas

$$\Rightarrow \boxed{Q_{xx} = 4qd^2} \qquad Q_{xy} = 0 \qquad Q_{xz} = 0 \qquad Q_{yz} = 0$$

$$Q_{yy} = -qd^2 - qd^2 + 2q\,0. \Rightarrow \boxed{Q_{yy} = Q_{zz} = -2qd^2}$$