Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra I
Segundo semestre de 2021

Repartido 4: Ideales maximales y anillos de fracciones

1. Investigar si los siguientes ideales I son ideales maximales o primos en el en anillo A.

    a) $I = (x)$ en $A = \mathbb{Z}[x]$.

    b) $I = (2)$ en $A = \mathbb{Z}[x]$.

    c) Si R es un anillo conmutativo y $m \lhd R$ es un ideal primo o maximal, en $A = R[x]$ el conjunto $\{p \in R[x] \, : p(0) \in m\}$.

    d) $A = C[0,1]$ e $I = \{f \in A : \ f(1/3) = f(1/2) = 0\}$.

    e) Si R es un dominio, el ideal $I = (x)$ es $A = R[[x]]$.

2. *a*) Sea A un anillo y $a \in A[[x]]$. Probar que a es invertible en $A[[x]]$ si y solo si a_0 es invertible en A.

    b) Dar un ejemplo de un elemento $f \in A[x]$ que no es invertible en $A[x]$ y sí lo es en $A[[x]]$.

    c) Probar que si A es local, entonces $A[[x]]$ también lo es, y deducir que $\mathbb{k}[[x]]$ es local si $\mathbb{k}$ es un cuerpo.

3. Se considera el anillo $C([0,1])$.

    a) Probar que para cada $t \in [0,1]$ la función evaluación en t, $\eta_t : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definida por $\eta_t(f) = f(t)$ es un morfismo de anillos.

    b) Probar que para cada $t \in [0,1]$ el conjunto $I_t = \{f \in C([0,1]) : \ f(t) = 0\}$ es un ideal maximal de $C([0,1])$.

    c) Probar que para cada ideal maximal I de $C([0,1])$ existe un único $t \in [0,1]$ tal que $I = I_t$. Sugerencia: supongamos por absurdo que existe I ideal maximal tal que $I \neq I_t$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces para cada $t \in [0,1]$ existe $f_t \in I$ tal que $f_t(t) \neq 0$. Luego $h_t := f_t(t)^{-1} f_t$ verifica que $h_t \in I$ y $h_t(t) = 1$ para todo $t \in [0,1]$. Probar usando la compacidad de $[0,1]$ que existe un conjunto finito $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset [0,1]$ tal que $h := \sum_{i=1}^n (h_{t_i})^2$ verifica $h(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$. Luego $h \in I$ y es invertible en $C([0,1])$.

4. Sean D_1 y D_2 dominios, F_1 , F_2 sus respectivos cuerpos de fracciones y $\phi : D_1 \to D_2$ un isomorfismo de anillos. Probar que ϕ se extiende a un isomorfismo entre F_1 y F_2.

5. Sea A un anillo conmutativo y $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado.

    a) Si $I \subset A$ es un ideal, probar que $S^{-1}I := \{a/s : \ a \in I, \ s \in S\}$ es un ideal de $S^{-1}A$.

    b) Probar que si J es un ideal de $S^{-1}A$, entonces $I = \{a \in A : \ a/1 \in J\}$ es un ideal de A tal que $J = S^{-1}I$.

    c) Probar que si $I \subset A$ es un ideal, entonces $I \cap S \neq \emptyset$ si y sólo si $S^{-1}I = S^{-1}A$.

    d) Probar que si I y J son ideales de A, entonces

    $$S^{-1}(I + J) = S^{-1}I + S^{-1}J, \quad S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J.$$

    e) Probar que la función $P \mapsto S^{-1}P$ establece una correspondencia uno a uno entre los ideales primos de A que no intersectan a S y los ideales primos de $S^{-1}A$.

6. Sea A un anillo conmutativo. Consideramos $N(A)$ el conjunto de todos los elementos nilpotentes de A.

   a) Probar que $N(A)$ es un ideal de A.

   b) Probar que $N(A)$ es la intersección de todos los ideales primos de A.

7. a) Hallar todos los morfismos de anillos de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{Z}_m$, $\forall n, m = 2, 3, \ldots$.

   b) Sean $A = \mathbb{Z}_6$ y $S = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\right\} \subset \mathbb{Z}_6$. Probar que $S^{-1}A$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

8. Sea $A = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] = \left\{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Probar que A es un subanillo de $\mathbb{C}$ y que su cuerpo de fracciones es isomorfo a $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right] = \left\{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

9. Sea A un anillo. El anillo de *series de Laurent formales* con coeficientes en A, notado $A((x))$, es el conjunto de las series formales de la forma $\sum_{n \geqslant N} a_n x^n$ donde $N \in \mathbb{Z}$ y $a_n \in A$ para todo $n \geqslant N$.

   a) Definir formalmente $A((x))$ y probar que es un anillo.

   b) Probar que si K es un cuerpo entonces $K((x))$ lo es también, y es $K((x)) = \mathrm{Frac}(K[[x]])$.

   c) Probar que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[[x]]) \subset \mathbb{Q}((x))$ es una inclusión estricta (Sugerencia: considerar la serie para e^x).