Relatividad especial

- Relatividad especial fue el punto de partida.

- Principio de relatividad

"Las leyes de la física son iguales en cualquier referencial inercial."

  - Pero la noción de referencial a que refiere es mas restringida la que hemos estado usando - Ref inercial "metrica". En estos particulas libres siguen lineas rectas espacio temporales y ademas los ejes de coordenadas son ortonormales.

  - Sin este restricción las leyes de física de nuestro mundo no serían iguales en toda referencial inercial.

- Inicialmente se penso que hay referenciales inerciales globales tambien en presencia de gravedad, como en la teoría de Newton, y que gravedad es una fuerza mas que desvia a las partículas de lineas mundo rectas.

  → Se pensó que gravedad cabe en el marco de relatividad especial

- Luego Einstein propuso que las referenciales inerciales son los en caida libre y que entonces solo son inerciales localmente. Relatividad pasa a ser un principio solo local: Leyes de física locales son iguales en todos referenciales inerciales locales metricas.

  → Relatividad debe caber en la estructura de referenciales inerciales locales, lo cual es la gravedad.

- Sin embargo, empezaremos con repasar la relatividad para referenciales inerciales globales, en ausencia de gravedad.

Referenciales inerciales globales

Supongamos que existen coordenadas en z^α buenas en todo el espacio tiempo tales que particulas libres tienen líneas mundo rectas en estas coordenadas:

$\frac{d^2 z^\alpha}{d z^{0\,2}} = 0$ ← acceleración cero, velocidad = tangente constante.

Si. y^η es otro referencial inercial global com z^α entonces

$z^\alpha = M^\alpha{}_\eta y^\eta + b^\alpha$ con $M^\alpha{}_\eta$ y b^α constantes e uniformes es decir, independientes de y^η

(- este tipo de mapa se llama una transformación "afín". Es una transformación lineal mas un translado por un vector constante.)

Dem: Parece intuitivo que las transformaciones afínes son las más generales que mapean rectas a rectas. Pero no encontré demostración mas sencilla que la siguiente

$$0 = \frac{d^2 z^\alpha}{d\theta^2} = \frac{d\eta}{d\theta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\eta}{d\theta}\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\eta}\frac{dy^\eta}{d\eta}\right)$$

$$= \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2 \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\eta}\left[\frac{d^2 y^\eta}{d\eta^2} + \underbrace{\frac{\partial y^\eta}{\partial z^\beta}\frac{\partial^2 z^\beta}{\partial y^\xi \partial y^\theta}}_{=\,\Gamma^\eta{}_{\xi\theta}}\frac{dy^\xi}{d\eta}\frac{dy^\theta}{d\eta} + \underbrace{\frac{d}{d\eta}\left(\ln\frac{d\eta}{d\theta}\right)}_{=\,K}\frac{dy^\eta}{d\eta}\right]$$

Ponemos $\theta = z^0$, $\eta = y^0$ y supongamos que y^η tambien son coordenadas inerciales globales. Entonces $\frac{d^2 y^\eta}{d\eta^2} = 0$ y $\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\eta}$ es invertible. Ademas ya desde el comienzo tuvimos que limitarnos a curvas con tangente v tal que $d\theta[v] \neq 0$ y $d\eta[v] \neq 0$ para que sean buenas estas parametros. Entonces

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\eta[v]}{d\theta[v]} \neq 0.$$

$$\Rightarrow \Gamma^\eta{}_{\xi\theta}\frac{dy^\xi}{d\eta}\frac{dy^\theta}{d\eta} + K\frac{dy^\eta}{d\eta} = 0$$ para todos tales lineas mundo inerciales,

Entonces para un rango abierto de $\frac{dy^\theta}{d\eta}$. Diferenciando dos veces en $\frac{dy}{d\eta}$ da

$$0 = \Gamma^\eta{}_{\xi\theta}$$

Entonces $\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial y^\xi \partial y^\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\eta} = M^\alpha{}_\eta$ es independiente de y

Integrando en y^η da $z^\alpha = M^\alpha{}_\eta y^\eta + b^\alpha$ con b^α independiente de y ▨

- En el sentido contrario es fácil verificar que la transformación afín $z^\alpha = M^\alpha{}_\beta y^\beta + b^\alpha$ mapean rectas $y^\alpha(y^0)$ a rectas $z^\alpha(z^0)$.

Entónces la primera ley de Newton es invariante bajo transformaciones afines, y solo ellas.

Pero! No todos los demas leyes de física de nuestro mundo son invariantes bajo todas transformaciones afines!

① Reglas tienen una longitud de equilibrio, fijado en parte por el numero de átomos de que estan hechos. Se pueden estirar pero por lo general esto require mucha fuerza, así si uno los trata gentilmente miden confiablemente su longitud natural.

$\Rightarrow$ las leyes de física definen una noción de distancia espacial

② Tambien hay relojes que avancan a cierto ritmo definido por su construccion cuando no se interfiere con ellos. P. ej. la transicion entre el estado fundamental y el primero exitado de un átomo de cesio produce radiación de cierta frecuencia que se usa para hacer relojes atómicos y de hecho es la base de la definición del segundo. Así en nuestro mundo la Naturaleza define una escala de tiempo.

- Estos son hechos físicos. Se puede imaginar un universo con leyes invariantes bajo transformaciones conformes. Si esta invariancia no esta rota entonces cambios de escala espacio temporales tendrian el mismo estatus como desplazamientos en nuestro mundo. La longitud de una regla, el ritmo de avance de un reloj no estaria determinado por su construccion. Se podria estirar reglas y enlentecer relojes facilmente y se quedarían en su estado estirado o enlentecido tan facilmente como en su estado inicial.

- Buscamos entonces un subconjunto de cartas inerciales, y transformaciones afines entre ellos, tal que las leyes de la física son iguales en estas cartas.

El principio de relatividad de Galileo postula que las leyes de física están invariantes bajo

1. Translaciones en el espacio y en el tiempo. Es decir las leyes son iguales en cortas z e y con $z^\alpha = y^\alpha + b^\alpha$ con b^α constantes en espacio y tiempo.

2. Rotaciones espaciales:

$$z^0 = y^0 \quad z^i = R^i{}_l\, y^l \quad i, l \in \{1,2,3\} \quad R \in SO(3) \leftarrow R^T R = \mathbb{1} \quad \det R = 1$$

si z^i e y^l son coordenadas espaciales Cartesianas.

3. Boosts Galileanas. - transformaciones que cambian de un referencial a otro con velocidad $\vec{v}$ constante con respecto al primero. Un puro boost Galileano con $\vec{v}$ segun el eje 1 es la transformacion $z \to y$ con

$$z^0 = y^0, \qquad z^2 = y^2$$
$$z^1 = y^1 + v y^0 \qquad z^3 = y^3$$

En 1905 Einstein propuso su modificada versión del principio de relatividad según el cuál las leyes de física son invariantes bajo los desplazamientos en espacio y tiempo, y las rotaciones de Galileo, y ademas bajo una modificada transformación de boost:

$$z^0 = \gamma(\, c y^0 + \frac{v}{c^2} y^1) \qquad z^2 = y^2$$
$$z^1 = \gamma(y^1 + v y^0) \qquad z^3 = y^3$$

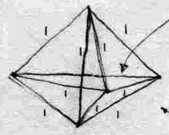
donde c es la velocidad de la luz en vacío y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

¿ Porque estas transformaciones ?

Translaciones Parece ser un hecho que las leyes de la física son invariantes bajo translaciones - siempre y cuando se traslade todos los elementos del sistema que interectuan entre si por igual. El Universo no parece tener un punto especial inamovible, como el "centro" que postuló Aristoteles.

Rotaciones De la misma manera la leyes de física parecen ser invariantes bajo rotaciones espaciales.

En la mecanica de Newton y Galileo, y tambien en la relatividad especial de Einstein se supone que la geometría del espacio determinado por distancias medidas con reglas en reposo es la de Euclides



$\Leftrightarrow$ $\exists$ coordenadas espaciales Cartesianas x, y, z tales que las diferencias $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ entre las coordenadas de los extremos de una regla que tomamos como nuestro estandard de distancia satisface

como el metro estandard guardado en Paris

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 1 \tag{1}$$

Claramente las leyes de física no son iguales en coordenadas no Cartesianas como en Cartesianas - en las unas se satisface (1) en las otras no. Entonces limitamos nuestras cartas inerciales a los que tienen coordenados espaciales Cartesianas.

Esto limita a las transformaciones. En particular para que sea una simetría una transformación de unicamente las coordenadas espaciales, es decir

$$z^0 = y^0 \, , \quad z^i = M^i{}_l \, y^l + b^i ,$$

este debe satisfacer

$$\Delta \vec{y}^{\,T} \Delta \vec{y} = \Delta \vec{z}^{\,T} \Delta \vec{z} = \Delta \vec{y}^{\,T} M^T M \Delta \vec{y} \qquad \forall \, \Delta \vec{y}$$

$\leftarrow$ desplazamiento desde un extremo a otro de una regla en carta y.

producto escalar escrito como multiplicación de vector transpuesto con vector.

$\Leftrightarrow M^T M = \mathbb{1} \Rightarrow M \in O(3) \leftarrow$ es una matriz ortogonal 3×3

$-\ \det M = \pm 1$ Si $\det M = 1$ $\quad M \in SO(3)$ es una rotacion

Si $\det M = -1$ $\quad -M \in SO(3) \Rightarrow M$ es una rotacion seguido por una inversion $(x, y, z \to -x, -y, -z)$. Resulta que inversiones no son simetrias de todas las leyes de física.

¿ Porque geometría espacial Euclidea ?

1. Correspondía bastante bien con experiencia en la Tierra para Galileo y Einstein cuando ellos formularon sus versiones de relatividad.

2. Hasta hoy en dia corresponde con experiencia que la geometría de una muy pequeña region del espacio es Euclidea. Es decir, existen coordenadas Cartesianas x^l en un entorno de $z^\alpha = 0$ tal que la longitud ds de una infinitesimal regla esta dado por $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$. Podemos cambiar globalmente a $x^l = \left.\frac{\partial x^l}{\partial z^i}\right|_{z=0} z^i$. ← transformación lineal, así traslacion uniforme en coords z^i ⟺ traslacion uniforme en coords x^l

Entonces por invariancia de leyes de física bajo translación la misma regla satisface

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Esto implica que reglas rectas finitas tienen longitud s con

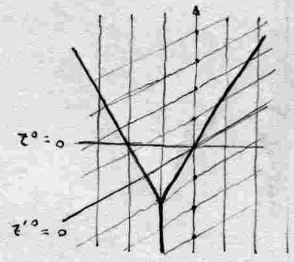
$$s^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

$\Rightarrow$ x^l son coordenadas Cartesianas y la geometria es Euclidea

Nota que al final vamos a postular relatividad especial localmente en el mundo real.

- Hay simetrias que transforman las coordenadas espaciales dejando fija la coordenada de tiempo. ¿ Hay simetrias que transforman el tiempo sin tocar a las coordenadas espaciales ?

  - sí. La <u>unica</u> es una <u>translacion</u> por un constante en el tiempo



Si estan fijas las coordenadas espaciales z^i en todo el espacio tiempo entonces la única libertad seria cambiar

$$z^0 \to z'^0 = M^0{}_0 z^0 + M^0{}_i z^i + b^0.$$

Si imaginamos relojes en reposo en los puntos marcados por z^i, es decir con lineas mundo z^i constante, esta transformacion corresponde a una combinacion de cambiar el ritmo de avance de todos los relojes por un factor común $M^0{}_0$, avanzar a todos los relojes por un tiempo b^0 común, y cambiar la sincronización de los relojes.

Sincronización

- Considera un par de partículas identicas, de igual masa y carga electrica, unidos por un hilo. Inicialmente estan en reposo en z^i = constante, pero luego se rompe el hilo, y salen volando.
- Una rotacion de 180° intercambia a las particulas que salen, entonces invariancia de la fisica bajo rotacion require que las dos partes salen con la misma velocidad.
- Esto no se preserve si se cambie la sincronizacion de los relojes. Hay solo una sincronización buena: dos relojes sincronizados si marcan el mismo tiempo cuando llegan a ellos las partículas identicas salidas de la explosion del compuesto en reposo en el punto exactamente en el medio entre los dos.
- Si esto vale simetria bajo rotacion con el tiempo z^0, como en la figura, entonces para que valga para el tiempo z'^0 require $M^0{}_i = 0$.

$M^0{}_0 = 1$

- Si las leyes de física son identicos con tiempo z'^0 y z^0 entonces el periodo de oscilacion de los relojes debe corresponder al mismo incremento de coordenada de tiempo en las dos cartas $\Delta z'^0 = \Delta z^0$. $\Rightarrow M^0{}_0 = 1$.

b^0 libre

- La construcción de los relojes y las leyes de física dictan el periodo del reloj, pero no su estado inicial. Así b^0 puede tener cualquier valor en $\mathbb{R}$ por mas que leyes iguales.

El hecho que las coordenadas espaciales deben ser Cartesianas y los relojes sincronizadas hacen bastante rígidos a los referenciales inerciales restringidos tal que valen simetría bajo desplazamiento y rotacion

Transformacion entre referenciales en reposo uno respecto al otro.

- Sean z^α e y^η los referenciales.
- Que y esté en reposo con respecto a z significa que los puntos espaciales y^l no se mueven respecto a los coordenados z^i – z^i es función solo de los y^l y no y^0

$$z^i = M^i{}_l\, y^l + b^i \qquad (M^i{}_0 = 0)$$

- ¿ Como transforma la coordenada tiempo entonces ? El cambio de etiquetas $y^l \to z^i$ de los relojes no afecta su sincronización. Los eventos (y^0, y_1^l) e (y^0, y_2^l), con $y_1^l, y_2^l \in \mathbb{R}^3$ puntos espaciales cualesquiera e y^0 igual para los dos, son simultaneos según el criterio de la explosión de la partícula compuesta, entonces deben tambien tener el mismo z^0. Así

$$z^0 = M^0{}_0\, y^0 + b^0. \quad \text{— no depende de } y^l$$

Además $M^0{}_0 = 1$ porque el periodo de los relojes debe ser igual según z^0 e y^0.

Nota: El reloj visto en coordenados z^i es en general un imagen distorsionado del reloj en coordenadas y^l. Por ejemplo podría ser encojido por un factor 2. Es imaginable un mundo en que todos relojes encojidos por un factor 2 siguen encojidos por un factor 2 y oscilan igual salvo que su periodo es multiplicado por un factor universal α. Pero esto no es nuestro mundo. Por ejemplo si se encoje un átomo de cesio por un factor 2 se encontraría en una combinación de estados exitados, pronto radiaria y caería a su estado fundamental, no encojido, y un reloj basado en este átomo retomaría su periodo estandard, determinado por las leyes de física y la composición del átomo. Esto es la hipotesis que las leyes de física establecen una escala de tiempo.

Como ya ha sido dicho, se supone que todos los estados de equilibrio (mecánico - $T \sim 0$) de una regla, en reposo en cualquier posición posible en coordenadas y^i satisface

$$\Delta\vec{y}^T \Delta\vec{y} = s^2 \leftarrow s = \text{longitud de la regla}$$

Las imagenes de la regla en z tambien son estados de equilibrio en reposo. Dado que las leyes de física son las mismas en z e y, tambien debe satisfacerse

$$s^2 = \Delta\vec{z}^T \Delta\vec{z} = \Delta\vec{y}^T M_3^T M_3 \Delta\vec{y}$$ con ${M_3}^i{}_l = M^i{}_l$ siendo el bloque 3×3 espacial de la matriz 4×4 M

Dado que esto vale para todas rotaciones de la regla, y para reglas con un rango de longitudes s

$$M^T{}_3 M_3 = \mathbb{1}$$

Entonces M_3 es una rotacion (elemento de $SO(3)$) o una rotación seguido por una reflexion en un plano.

Nota que el argumento descansa en la hipotesis que la longitud de equilibrio de la regla es determinado por las leyes de física y caracteristicas de la regla que no cambian al distorsionarla, como el numero de átomos que la compone. Es esencialmente la misma hipotesis que hicimos acerca del periodo del reloj.

- Al final las únicas transformaciones entre referenciales en reposo uno respecto al otro que podrían dejar invariantes a las leyes de la física son rotaciones y eventualmente reflexiones e inversión del tiempo. Estas últimas transformaciones discretas no son simetrias ni por separado ni combinadas.

Transformaciones entre referenciales en movimiento uno respecto al otro

$$z^\alpha = M^\alpha{}_\eta \, y^\eta + b^\alpha$$

Entonces la 3-velocidad de los puntos y^l = constante del referencial y en z es

$$v^i = \left.\frac{dz^i}{dz^0}\right|_{y^l = const} = M^i{}_0 \left.\frac{dy^0}{dz^0}\right|_{y^l = const}$$

y

$$1 = \left.\frac{dz^0}{dz^0}\right|_{y^l = const} = M^0{}_0 \left.\frac{dy^0}{dz^0}\right|_{y^l = const}$$

$$\Rightarrow \quad v^i = M^i{}_0 / M^0{}_0$$

La velocidad es constante e uniforme - independiente de y.

- Por nuestro estudio de transformaciones de simetría entre referenciales con la misma velocidad sabemos que las referenciales que tienen las mismas leyes de física estan determinados por su velocidad a menos de rotaciones y translaciones.

  $\Rightarrow$ Las simetrias postulados en el principio de relatividad son el máximo de simetrias bajo cambio de referencial que nuestro mundo puede tener. No puede haber más.

- Para simplificar la discusion supongamos que la carta z ha sido rotado tal que $\vec{v}$ es paralelo al eje z^1, y la carta y ha sido rotado tal que la velocidad del referencial z visto en y es según el eje $-y^1$. (Además revertimos el signo de z^0 si necesario para que $M^0{}_0 \geq 0$ y trasladamos z^α tal que $b^\alpha = 0$.)

  $$\Rightarrow \quad M^2{}_0 = M^3{}_0 = 0$$

  La velocidad $\vec{w}$ de los puntos z^i = constante esta determinado por

  $$0 = \left.\frac{dz^i}{dy^0}\right|_{z^i = const} = M^i{}_0 \cdot 1 + M^i{}_l \overbrace{\left.\frac{dy^l}{dy^0}\right|_{z^i = const}}^{w^l}$$

  $$\Rightarrow \quad M^i{}_l \, w^l = - M^0{}_0 \, v^i$$

  $\vec{w}$ según el eje $-y^1$ $\Rightarrow$ $M^2{}_1 = M^3{}_1 = 0$ $\quad M^1{}_1 \geq 0$

  y proyeccion espacial de la imágen del eje y^1 en la carta z es paralelo al eje z^1.

- Ahora mostramos que las imagenes de los ejes y^2 e y^3 en la carta z se pueden poner paralelos a los ejes z^2 y z^3 mediante una rotacion de la carta z entorno al eje z^1.

Entonces veremos que M queda en la forma diagonal a bloques

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

Consideramos una rotacion $z \to z'$ de las coordenadas espaciales de la carta z entorno del eje z^1. Esta rotacion preserva la 3-velocidad $\vec{v}$ de y respecto a z.

- Si definimos una carta $y'^{\eta} = M^{-1\,\eta}{}_{\alpha} z'^{\alpha}$ entonces esta tiene la misma velocidad que y. Dem:

$$y'^{\eta} = M^{-1\,\eta}{}_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{\theta} y^{\theta}$$

donde $R = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & r(\theta) \end{array}\right]$, $\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $r(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ← gira z^2, z^3 por angulo θ deja z^0, z^1 invariantes

Rotacion preserva $\vec{v}$ $\Rightarrow$ $R^{i}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{0} = R^{i}{}_{j} M^{j}{}_{0} = R^{i}{}_{j} v^{j} M^{0}{}_{0} = v^{i} M^{0}{}_{0} = M^{i}{}_{0}$

$$R^{0}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{0} = 1 \cdot M^{0}{}_{0}$$

$$\Rightarrow R^{\alpha}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{0} = M^{\alpha}{}_{0}$$

Entonces
$$\begin{aligned} y'^{m} &= M^{-1\,m}{}_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{0}\, y^{0} + M^{-1\,m}{}_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{\ell}\, y^{\ell} \\ &= \underbrace{M^{-1\,m}{}_{\alpha} M^{\alpha}{}_{0}\, y^{0}}_{\delta^{m}{}_{0} y^{0} = 0} + M^{-1\,m}{}_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{\ell}\, y^{\ell} \\ &= M^{-1\,m}{}_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{\ell}\, y^{\ell} \end{aligned}$$

y'^{m} es funcion solo de y^{ℓ}, no de y^{0} $\Rightarrow$ los puntos $y'^{m} = \text{const}$ en reposo respecto a los puntos $y^{\ell} = \text{const}$

y'^{θ} debe estar relacionado con y^{η} por una rotación espacial ∎

- Nota ademas que la velocidad $\vec{w}$ de z visto en y es invariante bajo esta rotación:

$$M^{i}{}_{\ell} w^{\ell} = -M^{0}{}_{0} v^{i} \Rightarrow M^{2}{}_{\ell} w^{\ell} = M^{3}{}_{\ell} w^{\ell} = 0 \Rightarrow M^{\alpha}{}_{\ell} w^{\ell} \text{ solo tiene componentes } \alpha = 1, 0$$

$$\Rightarrow R^{\alpha}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{\ell} w^{\ell} = M^{\alpha}{}_{\ell} w^{\ell} \Rightarrow M^{-1\,m}{}_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\beta} M^{\beta}{}_{\ell} w^{\ell} = w^{m}$$