7. La distribución de carga $\rho(\vec{r})$ de un núcleo atómico está concentrada en dimensiones del órden de $10^{-13} cm$. El potencial de los núcleos se aproxima en general por $\varphi = \frac{Ze}{r}$, lo que equivale a suponer que $\rho(\vec{r})$ esta distribuido de forma esféricamente simétrica. No hay evidencia de que ningún núcleo tenga momento dipolar. Sin embargo, sí existe evidencia de que muchos tienen momento cuadrupolar Q distinto a cero.

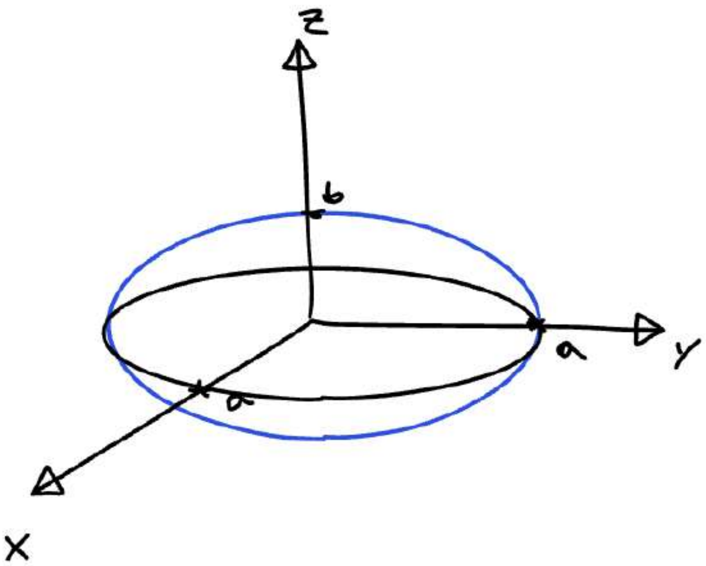
   a) Para simpificar, considere $\rho(\vec{r})$ uniforme en un elipsoide de revolución de semiejes a y b. Calcule Q respecto de ejes apropiados. La carga total es $q = Ze$.

   b) ¿Qué característica cualitativa del elipsoide revela el signo de Q_{zz}?

   c) Estime la asimetría de la distribución. Para $Z = 63$ y $\frac{Q_{zz}}{e} = 2,5 \times 10^{-24} cm^2$. Suponiendo que el radio medio es $R = \frac{a+b}{2} = 7 \times 10^{-13} cm$, determinar la diferencia $\frac{(a-b)}{R}$.

$Q_{neta} \neq 0 \Rightarrow \vec{p}$ es función del origen de coordenadas

$$\frac{a-b}{R} = 2\,\frac{a-b}{a+b}$$



$$Q_{ij} = \int \rho \left(3 r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}\right) d^3\vec{r}\,'$$

$$Q = \begin{pmatrix} \underline{Q_{11} = Q_{xx}} & \underline{Q_{12}} = Q_{xy} & \underline{Q_{13}} = Q_{xz} \\ Q_{21} = Q_{12} & \underline{Q_{22} = Q_{yy}} & \underline{Q_{23} = Q_{yz}} \\ Q_{31} = Q_{13} & Q_{32} = Q_{23} & \underline{Q_{33}} = Q_{zz} \end{pmatrix}$$

$$Q = Q^T \qquad Tr(Q) = 0$$

$$Q_{xx} = \int \rho(3x'^2 - r'^2)\, d^3\vec{r}\,' = \int \rho(3y'^2 - r'^2)\, d^3\vec{r} = Q_{yy}$$

$$Q_{xz} = \int \rho\, 3x'z'\, d^3\vec{r}\,' = 0$$

$$Q_{yz} = \int \rho\, 3y'z'\, d^3\vec{r}\,' = 0$$

$$Q_{xy} = \int \rho\, 3x'y'\, d^3\vec{r}\,' = 0$$

Por simetría del problema

$x \to -x \quad y \to -y \quad z \to -z$

$$Q_{zz} = \int \rho(3z'^2 - r'^2)\, d^3\vec{r} = -Q_{xx} - Q_{yy} = -2Q_{xx}$$

$$Q_{xx} = \int \overset{\rho_0}{\rho(\vec{r}\,')}(3x'^2 - r'^2)\, d^3\vec{r}\,' \Rightarrow Q_{xx} = \rho_0 \int \left[3a^2\tilde{x}^2 - \underbrace{a^2(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2) - b^2\tilde{z}^2}\right] d^3\tilde{\vec{r}}\; a^2 b$$

elipsoide

esfera de radio 1

$d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, d\tilde{z}$

$|J|$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{b^2} \leq 1$$

$\neq$

$$x' = a\tilde{x}$$
$$y' = a\tilde{y}$$
$$z' = b\tilde{z}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2) + b^2\tilde{z}^2$$

$$\tilde{r}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1$$

$$Q_{xx} = \rho_0 \int_{esfera} \left\{ \cancel{2}a^2\tilde{x}^2 - \cancel{a^2\tilde{y}^2} - b^2\tilde{z}^2 \right\} d^3\tilde{r}\, a^2 b = \rho_0 a^2 b \int \left(a^2\tilde{x}^2 - b^2\tilde{z}^2\right) d^3\tilde{r}$$

$$\int_{esfera} a^2\tilde{x}^2\, d^3\tilde{r} = \int_{esfera} a^2\tilde{y}^2\, d^3\tilde{r}$$

$$\Rightarrow Q_{xx} = \rho_0 a^2 b \left(a^2 - b^2\right) \underbrace{\int_{esfera} \tilde{z}^2\, d^3\tilde{r}}_{\int_{esfera} \tilde{x}^2\, d^3\tilde{r}}$$

$$\int_{esfera} \tilde{x}^2\, d^3\tilde{r} = \int_{esfera} \tilde{z}^2\, d^3\tilde{r}$$

$$Q_{xx} = \rho_0 a^2 b \left(a^2 - b^2\right) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\tilde{\phi}}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \text{sen}\,\tilde{\theta} \cos^2\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta}}_{\underbrace{-\left.\frac{\cos^3\tilde{\theta}}{3}\right|_0^{\pi}}_{+\frac{2}{3}}} \underbrace{\int_0^1 \tilde{r}^4\, d\tilde{r}}_{\frac{1}{5}} \Rightarrow \boxed{Q_{xx} = \frac{4\pi}{15} \rho_0 a^2 b \left(a^2 - b^2\right)}$$

$$\boxed{Q_{yy} = Q_{xx}}$$

$$\boxed{Q_{zz} = -2Q_{xx}}$$

b) $$Q_{zz} = \frac{8\pi}{15}\rho_0 a^2 b (b^2 - a^2)$$

$Q_{zz} > 0 \Leftrightarrow$ es un elipsoide tipo "huevo"

$Q_{zz} < 0 \Longleftrightarrow$ es un elipsoide tipo "platillo volador"

relacionemo ρ_0 y $q = Ze$

$$\int_{\text{elipsoide}} \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,' = q = \rho_0 \int_{\text{elipsoide}} d^3\vec{r}\,' = \int_{\substack{\text{esfera}\\ \text{de radio } 1}} \rho_0 a^2 b\, d^3\tilde{\vec{r}} = \rho_0 a^2 b \overbrace{\int_{\substack{\text{esfera}\\ \text{de radio } 1}} d^3\tilde{\vec{r}}}^{\substack{\frac{4}{3}\pi \\ \text{vol de la esfera}}}$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{3q}{4\pi a^2 b}$$

c) es vuestro