Electromagnetismo (2021)
Práctico 4
Método de imágenes y Coeficientes de potencial

Electromagnetismo (2021)
Práctico 5
Ecuación de Laplace con Separación de Variables

$\nabla^2 \varphi = 0$ Ec. de Laplace

$\left(\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right.$ Ec. de Poisson$)$

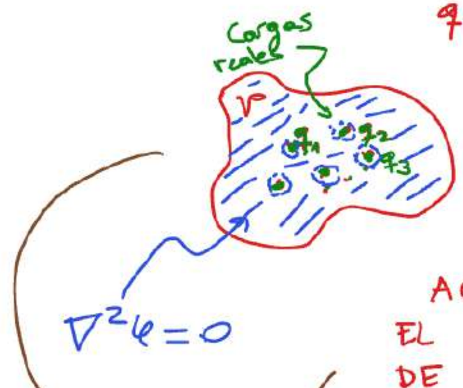
para ciertas condiciones de borde la solución es única
(al menos para $\nabla \varphi$)

$\Rightarrow$ No importa como llego a φ_{sol}
Sólo importa que si $\nabla^2 \varphi_{sol} = 0$ y φ_{sol} satisface las cond. de borde

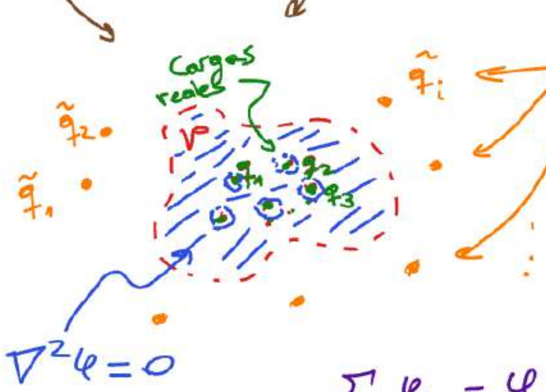
$\Rightarrow$ φ_{sol} es LA solución de mi problema.

Método de imágenes

quiero hallar φ en la región $\mathcal{V}$ siendo que conozco $\varphi\big|_{\partial\mathcal{V}}$



Me voy a olvidar del borde, momentaneamente y voy a intentar resolver el problema AGREGANDO CARGAS NO EXISTENTES EN EL PROBLEMA ORIGINAL FUERA DE LA REGIÓN DE INTERÉS



CARGAS NO EXISTENTES EN EL PROBLEMA

$$\sum_{\substack{i \,\in\, \text{cargas reales y virtuales} \\ \text{(las no existentes en el prob. orig.)}}} \varphi_i \equiv \varphi_{sol}$$

$\Rightarrow$ (1) Si φ_{sol} satisface $\nabla^2\varphi = 0$ en $\mathcal{V}$

(2) $\varphi_{sol}\big|_{\partial\mathcal{V}} = \varphi\big|_{\partial\mathcal{V}}$ $\Rightarrow$ gané.

φ_i es el potencial producido únicamente por la carga i

(obs: se cumple (1) porque puse las cargas FUERA de $\mathcal{V}$)

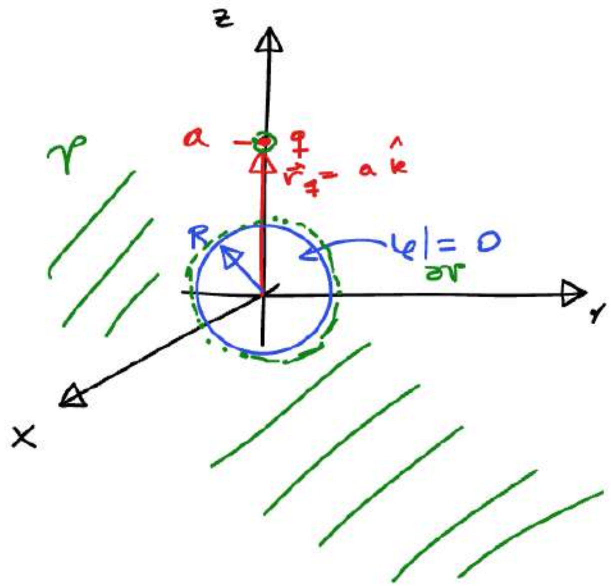
4. Considere una carga puntual colocada en $z = a$ respecto al origen de coordenadas. En el origen se encuentra centrada una esfera conductora de radio $R < a$ conectada a tierra.

a) Probar que la carga imagen que satisface las condiciones en la superficie de la esfera, se debe colocar en a posición $z' = \frac{R^2}{a}$ y que el valor de la carga imagen es $q' = -\frac{Rq}{a}$.

b) Halle la densidad inducida en la superficie y desmuestre por integración directa que es igual a la de la parte *a*)

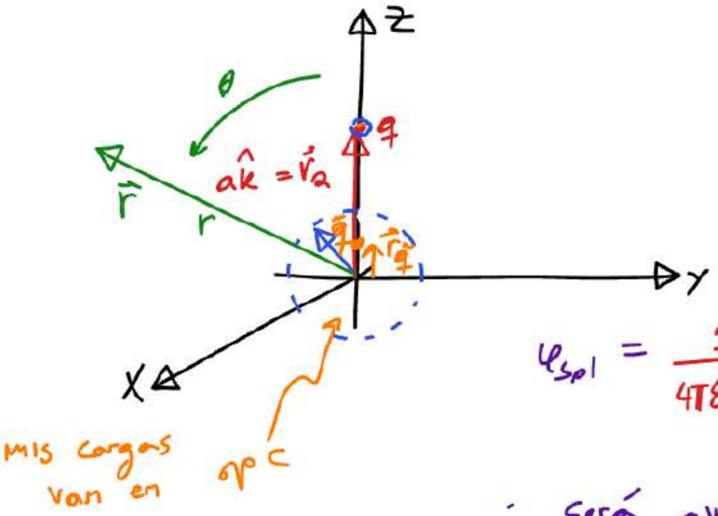
c) Halle el potencial en todo el espacio exterior a la esfera si la misma está a un potencial constante φ_0 en lugar de a tierra.

d) En base a la parte c), justifique por que una carga no se escapa de un conductor a un potencial dado.



Hallar φ en V

Nuevo problema



$$\varphi_{sol} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_q|} + \frac{\tilde{q}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_{\tilde{q}}|}$$

$$\nabla^2\varphi_{sol} = 0 \text{ en } V$$

¿será que puedo elegir $\tilde{q}$ y $\vec{r}_{\tilde{q}} \,/\, \varphi_{sol}|_{\partial V} = 0$?

mis cargas van en $\wp'^c$

¿será que puedo elegir $\tilde{q}$ y $\vec{r}_{\tilde{q}}$ / $\varphi_{sol}\Big|_{\partial\wp} = 0$?

esta era mi c.b.

$$\varphi_{sol} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|} + \frac{\alpha}{|\vec{r}-\vec{r}_{\tilde{q}}|}\right]$$

$\tilde{q} = \alpha\, q$ (xq' puedo)

$\vec{r}_{\tilde{q}} = \tilde{z}\,\hat{k}$ (x simetría del problema no podría estar en otro lado)

$$\varphi_{sol} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} + \frac{\alpha}{\sqrt{r^2+\tilde{z}^2-2r\tilde{z}\cos\theta}}\right]$$

quiero que $\varphi_{sol}\Big|_{r=R} = 0$ (en $\partial\wp$) $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{R^2+\tilde{z}^2-2R\tilde{z}\cos\theta}} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} R^2+\tilde{z}^2 = \alpha^2 R^2 + \alpha^2 a^2 \\ \cancel{+2}R\tilde{z} = \cancel{+}\alpha^2 \cancel{2} a \cancel{R} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{\tilde{z}}{a}} \quad R^2+\tilde{z}^2 = \frac{\tilde{z}}{a}R^2 + \tilde{z}a$$

necesariamente $\alpha < 0$

$Sg(\tilde{q}) = -Sg(q)$

$$\Downarrow$$

$$R^2 a + \tilde{z}^2 a = \tilde{z}R^2 + \tilde{z}a^2$$

$$\Rightarrow \tilde{z}^2 a - (R^2+a^2)\tilde{z} + R^2 a = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{z} = \frac{R^2+a^2 \pm \sqrt{(R^2+a^2)^2 - 4R^2a^2}}{2a}$$

$$\Rightarrow \tilde{z} = \frac{R^2+a^2 \pm \sqrt{R^4+a^4+2a^2R^2-4R^2a^2}}{2a}$$

$$\Rightarrow \tilde{z} = \frac{R^2+a^2 \pm \sqrt{(R^2-a^2)^2}}{2a} = \frac{R^2+a^2 \pm (a^2-R^2)}{2a}$$

$a > R$

$a \Rightarrow \alpha = -1 \leftarrow \varphi_{sol} = 0$ (me va a servir si quiero el potencial en $r<R$)

$\frac{R^2}{a} < a \Rightarrow \alpha = -\frac{R}{a}$

$r > R$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{sol} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-a\hat{k}|} - \frac{\frac{Rq}{a}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\frac{R^2}{a}\hat{k}|}}$$

$\nabla^2\varphi_{sol} = 0$ ✓

$\varphi_{sol}\big|_{\partial\mathcal{V}} = 0$ ✓

$\Rightarrow$ gané

$\boxed{\varphi_{sol} = 0}$ $r<R$

Si queremos $\varphi\big|_{r<R}$ usamos la sol roja (piensenlo con cuidado)

$$-\underbrace{\frac{\partial\varphi_{sol}}{\partial r}\Big|_{r^+}} + \cancel{\frac{\partial\varphi_{sol}}{\partial r}\Big|_{r^-}}_{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$