Relatividad especial a partir de la invarianza de la velocidad de la luz

Hartle cap 4, 5 especialmente 4.5, 5.1, 5.2

Vamos a desarollar la relatividad especial de Einstein a partir del principio de relatividad, que las leyes de física son invariantes bajo traslaciones, rotaciones y boosts (transformación a referencial con otra velocidad), y además las hipotesis que una de estas leyes de física es que la velocidad de la luz en vacío es un constante universal c, y que las leyes de física definen una escala de tiempo.

Mas precisamente, vamos a suponer que para todas velocidades menores que la de la luz existen referenciales inerciales especiales z^α tales que el desplazamiento Δz^α entre dos eventos conectados por un rayo de luz siempre satisface

$$(\Delta z^0)^2 - (\Delta z^1)^2 - (\Delta z^2)^2 - (\Delta z^3)^2 = 0 ,$$

← unidades han sido elegidas para que $c = 1$.

y que todos las demás leyes de física toman formas estandard que son iguales en todos las referenciales inerciales especiales, y que son invariantes bajo rotaciones espaciales y translaciones en espacio y tiempo en estos referenciales.

Además vemos a tomar en cuenta que en nuestro mundo las leyes de física no son invariantes bajo cambio de escala, o "dilataciones", $z^\alpha \to \Omega z^\alpha$. Por ejemplo, hay "relojes" con periodo intrínsico, como el ya mencionado átomo de cesio, o una colección de partículas inestables que decaen con vida media T en reposo. Otra manera de verlo es que las leyes de física definen la longitud Planck $\ell_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ o el radio de Schwarzschild de un electrón $\frac{2G m_{electrón}}{c^2}$, o longitud de Compton del electrón $\lambda = \frac{\hbar}{m_e c}$

El requisito de invarianza de la velocidad de la luz determina a los referenciales especiales casi por completo. Definimos a la matriz

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la condición $(\Delta z^0)^2 - (\Delta z^1)^2 - (\Delta z^2)^2 - (\Delta z^3)^2 = 0$ sobre rayos de luz se puede escribir como $-\eta_{\alpha\beta}\, \Delta z^\alpha \Delta z^\beta = 0$.

- Si z'^θ es otro referencial inercial especial con el mismo origen que z entonces

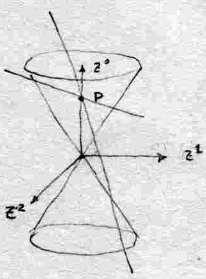
$\eta_{\theta\xi}\, z'^\theta z'^\xi = 0 \iff z'$ se puede conectar al origen por un rayo de luz

$\iff \eta_{\alpha\beta}\, z^\alpha z^\beta = 0$

Entonces en un punto cualquiera en espacio tiempo

$$\eta_{\theta\xi}\, z'^\theta z'^\xi = \Omega^2 \eta_{\alpha\beta}\, z^\alpha z^\beta \quad \text{con } \Omega \in \mathbb{R} \text{ un constante en el espacio-tiempo}$$

Dem: z' es lineal en z. Entonces $\eta_{\theta\xi}\, z'^\theta z'^\xi$ es un cuadrático en z^α, con los mismos ceros que $\eta_{\alpha\beta}\, z^\alpha z^\beta$ – el cono luz.



Fija un punto P adentro del cono luz futuro – puede estar en $z^i = 0$, $z^0 > 0$. Sea ϕ constante con $\phi = \eta_{\theta\xi}\, z'^\theta z'^\xi / \eta_{\alpha\beta}\, z^\alpha z^\beta$ en P

Sobre cualquier recta a traves de P $\eta_{\theta\xi}\, z'^\theta z'^\xi$ y $\phi\, \eta_{\alpha\beta}\, z^\alpha z^\beta$ son parabolas que coinciden en P y en sus dos ceros reales. Entonces

$$\eta_{\theta\xi}\, z'^\theta z'^\xi = \phi\, \eta_{\alpha\beta}\, z^\alpha z^\beta$$

en cualquier recta a traves P y entonces en todo el espacio tiempo.

$\phi > 0$ porque si $\phi < 0$ entonces la region con $\eta_{\theta\xi}\, z'^\theta z'^\xi > 0$ coincide con la región $\eta_{\alpha\beta}\, z^\alpha z^\beta < 0$. Pero la primera región es conexa mientras la segunda consiste de dos partes desconexas, así no pueden coincidir. ($\phi = 0$ es excluido porque $\exists\, z'^\theta$ con $\eta_{\theta\xi}\, z'^\theta z'^\xi \neq 0$ y estos z'^θ corresponden a valores de z^α ya que la transformacion es invertible.) Finalmente, pone $\Omega = \sqrt{\phi}$ ∎

- Si definimos $z''^\theta = \frac{1}{\Omega} z'^\theta$ entonces $\eta_{\theta\xi} z''^\theta z''^\xi = \eta_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta$

- Llamaremos <u>transformación de Lorentz</u> a mapas lineales $z \to y$, $y^\theta = L^\theta{}_\alpha z^\alpha$

tales que $\eta_{\theta\xi} y^\theta y^\xi = \eta_{\theta\xi} L^\theta{}_\alpha L^\xi{}_\beta z^\alpha z^\beta = \eta_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta \quad \forall z$

- esto es equivalente a $\eta_{\theta\xi} L^\theta{}_\alpha L^\xi{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$ ← L preserva a la matriz η.
- es una generalización de las matrices ortogonales que preservan la métrica Euclídea en coordenadas Cartesianas δ_{ij}. Si el producto escalar es definido por $\frac{\partial}{\partial y^\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial y^\xi} = \eta_{\theta\xi}$ ← $\frac{\partial}{\partial y^\theta}$ son una base "ortonormal" (con $\frac{\partial}{\partial y^0} \cdot \frac{\partial}{\partial y^0} = -1$) entonces $\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial y^\theta}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\theta} = L^\theta{}_\alpha \frac{\partial}{\partial y^\theta}$ es otra base ortonormal en el mismo sentido.
- $\eta_{\theta\xi} L^\theta{}_\alpha \eta^{\alpha\gamma} L^\xi{}_\beta = \eta^{\alpha\gamma}\eta_{\alpha\beta} = \delta^\gamma{}_\beta$ ← Aquí $\eta^{\alpha\beta}$ es la matriz inversa de η, y de hecho es la misma matriz $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow L^{-1\gamma}{}_\xi = \eta_{\theta\xi} L^\theta{}_\alpha \eta^{\alpha\gamma}$ ← esto es análogo a $M^{-1} = M^T$ para matrices ortogonales

- $\det L = \pm 1$. Si $\det L = 1$ y $L^0{}_0 > 0$ entonces L es "propia".
- Rotaciones espaciales, $R = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & r \end{array}\right]$ con r 3×3, $r^T r = \mathbb{1}$, $\det r = 1$, son

son transf. Lorentz propias, ya que preservan $(z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2$

- Cualquier transf. de Lorentz propia que deja el tiempo incambiado — $y^0 = z^0$ es una rotación. ⇐ preserva $(z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2$ y tiene $\det \underbrace{[L^i{}_j]}_{\text{componentes espaciales}} = 0$
- Cualquier transf. de Lorentz propia que deja el <u>eje</u> de tiempo incambiado es una rotación. <u>Dem</u>: Supongamos $z \to y$ $y^\theta = L^\theta{}_\alpha z^\alpha$ es una transformación de Lorentz y que $\frac{\partial}{\partial y^0} = \frac{\partial}{\partial z^0} = \frac{\partial y^\theta}{\partial z^0}\frac{\partial}{\partial y^\theta} = L^\theta{}_0 \frac{\partial}{\partial y^\theta}$. Entonces $L^\theta{}_0 = \delta^\theta{}_0$

y $L^{-1\,0}{}_\theta = \eta^{0\beta} L^\xi{}_\beta \eta_{\xi\theta} = -L^\xi{}_0 \eta_{\xi\theta} = \delta^0{}_\theta$

$\Rightarrow z^0 = L^{-1\,0}{}_\theta y^\theta = y^0$, así L es una rotación. ▨

- $L_\psi = \left[\begin{array}{cc|cc} \cosh\psi & \sinh\psi & & \\ \sinh\psi & \cosh\psi & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right]$ es una transformación de Lorentz propia.

Si $y^\theta = L^\theta_{\psi\,\alpha} z^\alpha$ entonces $\eta_{\theta\xi} y^\theta y^\xi = -(\cosh\psi\, z^0 + \sinh\psi\, z^1)^2 + (\sinh\psi\, z^0 + \cosh\psi\, z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2$

$= -(\cosh^2\psi - \sinh^2\psi)((z^0)^2 - (z^1)^2) + (z^2)^2 + (z^3)^2$

$= -(z^0)^2 + (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 = \eta_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta$.

Volvemos a las transformaciones que son simetrías de las leyes de física.

Hemos vistos que estas deben ser de la forma de una transformación de Lorentz seguido por una dilatación: $z''^{\theta} = L^{\theta}{}_{\alpha} z^{\alpha}$, $z'^{\theta} = \Omega z''^{\theta}$

$\uparrow$ Lorentz $\qquad \uparrow$ dilatación

Las dilataciones no son simetrías de las leyes de física de nuestro mundo.

Entonces para cada transformación de Lorentz, L, a lo sumo una transformación, $y^{\theta} = \Omega(L) L^{\theta}{}_{\alpha} z^{\alpha}$, con un valor de Ω determinado por L, puede ser una simetría.

Ahora mostraremos que $\Omega(L) = 1$ es la única posibilidad

- Si hay simetrías asociado a dos transformaciones de Lorentz L_1, L_2 $x \to y$ $y \to z$ con $z^{\alpha} = \Omega(L_1) L_1{}^{\alpha}{}_{\theta} y^{\theta}$ y $y^{\theta} = \Omega(L_2) L_2{}^{\theta}{}_{\lambda} x^{\lambda}$

entonces tambien es una simetría $x \to z$ $\quad z^{\alpha} = \Omega(L_1)\Omega(L_2) L_1{}^{\alpha}{}_{\theta} L_2{}^{\theta}{}_{\lambda} x^{\lambda}$

$L_1 = L_1 L_2$ es una tranformación de Lorentz, ya que preserva η, y por lo anterior $\Omega(L_1 L_2) = \Omega(L_1)\Omega(L_2)$

- Rotaciones son transformaciones de Lorentz y simetrías de las leyes de física (con $\Omega = 1$)

- Sea $S = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, la rotación por $180°$ entorno del eje 3.

Entonces $S L_{\psi} S = L_{\psi}^{-1}$. Dem: $S L_{\psi} S = \left[\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & \begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix} \end{array}\right]$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow S L_{\psi} S = L_{\psi}^{-1}$$

$\blacksquare$

$\Rightarrow 1 = \Omega(L_{\psi} L_{\psi}^{-1}) = \Omega(L_{\psi} S L_{\psi} S) = \Omega(L_{\psi})^2$. Entonces porque $\Omega > 0$ $\Omega(L_{\psi}) = 1$

- Cualquier transf. de Lorentz propia se puede escribir como $L = R_1 L_{\psi} R_2$ para algún $\psi \geq 0$

Dem: Si $z^{\alpha} = L^{\alpha}{}_{\theta} y^{\theta}$ entonces el eje tiempo de y es según

$\frac{\partial}{\partial y^0} = \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial y^0} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} = L^{\alpha}{}_{0} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}$. Elegimos R_1^{-1} tal que gira este eje al plano z^0, z^1

$$(R_1^{-1} L)^2{}_0 = (R_1^{-1} L)^3{}_0 = 0, \quad (R_1^{-1} L)^1{}_0 \geq 0$$

Para cualquier transformada de Lorentz $\eta_{\alpha\beta} L^{\alpha}{}_{0} L^{\beta}{}_{0} = \eta_{00} = -1$ así

$((R_1^{-1}L)^0{}_0)^2 - ((R_1^{-1}L)^1{}_0)^2 = 1$ y $(R_1^{-1}L)^0{}_0 > 0$ ya que $L^0{}_0 > 0$ por ser L propia.

$\Rightarrow \exists\, \psi$ tal que $\cosh\psi = (R_1 L)^0{}_0$ $\sinh\psi = (R_1 L)^1{}_0$

Porque $(R_1 L)^1{}_0 \geq 0$ $\psi \geq 0$

Entonces $(R_1^{-1}L)^{\alpha}{}_0 = L_{\psi}{}^{\alpha}{}_0$ y entonces $(L_{\psi}^{-1} R_1^{-1} L)^{\alpha}{}_0 = L_{\psi}^{-1}{}^{\alpha}{}_{\beta} (R_1^{-1}L)^{\beta}{}_0$

$= L_{\psi}^{-1}{}^{\alpha}{}_{\beta} L_{\psi}{}^{\beta}{}_0 = \delta^{\alpha}{}_0$

$\Rightarrow L^{-1}_{\psi} R_1^{-1} L$ es una transf. de Lorentz propia que deja el eje tiempo invariante

$\Rightarrow$ es una rotación $L^{-1}_{\psi} R_1^{-1} L = R_2$ $\Rightarrow L = R_1 L_{\psi} R_2$. ∎

De esto concluimos que $\Omega(L) = \Omega(R_1)\,\Omega(L_{\psi})\,\Omega(R_2) = 1$.

En resumen si vale el principio de relatividad, si la velocidad de un rayo de luz es igual medido en cualquier referencial y las leyes de física no son invariantes bajo dilataciones entonces las únicas transformaciones de coordenadas (en un espacio tiempo con referenciales inerciales globales) que son simetrías de las leyes de física son las transformaciones de Lorentz propias. (Las impropias son seguidas por reflexiones e inversiones del tiempo que no son simetrías de todas la leyes de física. Las leyes que sí son simétricas bajo estas operaciones son invariantes bajo todas transformaciones de Lorentz.)