Soluciones Práctico 5

20 de septiembre de 2021

Ejercicio 1

(a) $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2

(a) $A = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$.

(b) $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n-1} & -\frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n-1} \\ -\frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n-1} & \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n-1} \end{pmatrix}$

(c) Para $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, el límite es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Para $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el límite es $\begin{pmatrix} +\infty \\ +\infty \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3

(a) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$.

(c) **(1)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ +\infty \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} a_0 \\ a \end{pmatrix}$, donde:

- $a = a_0$ si $b_0 - a_0 = 0$
- $a = +\infty$ si $b_0 - a_0 > 0$
- $a = -\infty$ si $b_0 - a_0 < 0$

Ejercicio 4

(a) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 11 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5

(a) $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}1 & 1{,}1 \end{pmatrix}$.

(b) Los valores propios son 1 y $\frac{3}{5}$. Los vectores propios asociados son de la forma (x, x), $(5y, y)$ respectivamente.

(c) $\lim B_n = \lim R_n = \frac{5R_0 - B_0}{4}$, que debe interpretarse de la siguiente manera:

- Si $5R_0 - B_0 > 0$ el número de búhos así como el de ratas tiende al número $\frac{5R_0 - B_0}{4}$.
- Si $5R_0 - B_0 \leq 0$ la población tiende a extinguirse.

(d) $5R_0 > B_0$.

Ejercicio 6

(a) El polinomio característico es $\lambda^2 + 3$ que no tiene raíces reales.

(b) El polinomio característico es $(\lambda - 3)^2$ que tiene raíz doble 3. Los vectores propios asociados al valor propio 3 son de la forma $(0, y)$.

Ejercicio 7

(a) El polinomio característico es $(\lambda + 2)^2(\lambda - 3)$ con raíz doble -2 y raíz simple 3.

(b) Los vectores propios asociados a 3 son de la forma $(-2y, y, 0)$. Puede tomarse $u = (-2, 1, 0)$.

(c) Los vectores propios asociados a -2 son de la forma $(x, y, x + y)$. Pueden tomarse $v = (1, 0, 1), w = (0, 1, 1)$.

(d) En concordancia con las partes anteriores se pueden tomar $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se tiene $det(P) = 1 \neq 0$ y por lo tanto P es invertible.

(e) Para la P dada en **(d)**, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.