

Examen. 27/3/2020.

Nombre:

1. Se considera una población de hembras dividida en dos franjas etáreas. La probabilidad de sobrevivir a la primera franja y pasar a la segunda es de $\frac{1}{2}$. Se sabe además que una hembra tiene en promedio 3 hijas mientras está en la primera franja etárea y en promedio 1 mientras está en la segunda.

a) Hallar la matriz de Leslie que modela a dicha población.

b) Averiguar si la población tiene al crecimiento, a la estabilidad o a la extinción.

2. Sean $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Probar que P es invertible y hallar su inversa.

b) Supongamos que $A = PDP^{-1}$ (NO se pide calcular A):

1) Calcular $\det(A)$.

2) Calcular $A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nota. Cada parte vale 20 puntos. Para aprobar se precisan 50.

Solución.

1. a) $L = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $R = 5/2 > 1$, luego la población crece.

2. a) Es $\det P = 15 \neq 0$, luego P es invertible. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

b) 1) $\det(A) = \det(D) = 4$.

2) $A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = PD \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$