Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática II, módulo 1
Segundo semestre 2019

Examen. 29/10/2020.

Nombre:

1. (**40 puntos**) Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Se pide.

   a) Investigar si son invertibles

   b) En caso de ser invertible hallar la matriz inversa.

2. (**60 puntos**) Se considera una población dividida en tres clases de edad de 10 años cada una. Se tienen los siguientes datos

   - en promedio cada 10 años las hembras de la primera clase tienen una hija;
   - originalmente hay 40 hembras en la primera clase, 20 en la segunda y 10 en la tercera;
   - A los 10 años hay 120 hembras en la primera clase, 20 en la segunda y 5 en la tercera;
   - A los 20 años hay 190 hembras en la primera clase.

   Se pide.

   a) Hallar la matriz de Leslie de la población.

   b) Hallar el promedio de hijas que tiene una hembra durante toda su vida.

   c) Indicar si la población tiene a crecer, estabilizarse o extinguirse, justificando el resultado.

Nota. Para aprobar se requieren 50 puntos.

Solución

1. *a*) Es $\det A = 0$ y $\det B = 1$. Luego B es invertible y A no lo es.

   b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *a*) Sea $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$. El primer dato nos dice que es $a_1 = 1$. Usando $LX^{(0)} = X^{(1)}$ obtenemos $b_1 = 1/2$, $b_2 = 1/4$ y $2a_2 + a_3 = 8$. Después usando $LX^{(1)} = X^{(2)}$ obtenemos $4a_2 + a_3 = 14$. Resolviendo el sistema

$$2a_2 + a_3 = 8; \quad 4a_2 + a_3 = 14$$

   deducimos $a_2 = 3$ y $a_3 = 2$. Luego

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) El promedio de hijas que tiene una hembra durante toda su vida es

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 = 11/4.$$

   c) Como es $R > 1$ entonces la población tiende a crecer.