

Examen. 13/12/2021.

Nombre:

Cédula:

*El mínimo para aprobar es de 50 puntos.*

1. (20 puntos) Hallar  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  para que se verifique la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. (30 puntos) Se sabe que vale  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1$ . Calcular los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 2a_{21} + 3a_{11} & 2a_{22} + 3a_{12} & 2a_{23} + 3a_{13} & 2a_{24} + 3a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

3. (50 puntos) Se considera una población dividida en tres clases de edad de 10 años cada una. Se tienen los siguientes datos de lo que ocurre en promedio cada 10 años.

- Las hembras de menos de 10 años tienen una hija, las de entre 10 y 20 años tienen seis y las de más de 20 años tienen ocho.
- De las hembras de menos 10 años, sobrevive la cuarta parte, y de las de entre 10 y 20 años, sobrevive la mitad.

Se pide.

- Hallar la matriz de Leslie  $L$  de la población.
- Si en un momento dado sabemos que hay 80 hembras de menos de 10 años, 20 de entre 10 y 20 años, y 10 de más de 20 años, calcular cuántas hay en cada clase de edad al cabo de **20 años**.
- Hallar el promedio de hijas que tiene una hembra durante toda su vida.
- Probar que  $\lambda = 2$  es un valor propio de  $L$ .
- Si se sabe que a largo plazo hay 10 hembras de más de 20 años, indicar cuántas hay en cada una de las otras dos clases de edad.

**Nota:** en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.

## Solución

1.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 2a_{21} + 3a_{11} & 2a_{22} + 3a_{12} & 2a_{23} + 3a_{13} & 2a_{24} + 3a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 2.$$

3. a)  $L = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$

b) Usando  $X_1 = LX_0$  y  $X_2 = LX_1$ , obtenemos que hay 480 en la primera, 70 en la segunda y 10 en la tercera.

c) El promedio de hijas que tiene una hembra durante toda su vida es  $R = 7/2$ .

d) Es  $\chi_L(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + 1$ . Es inmediato verificar que vale  $\chi_L(2) = 0$ .

e) Por la parte anterior el valor propio dominante es  $\lambda_1 = 2$ . Un vector propio correspondientes es  $V_1 = (1, 1/8, 1/32)$ . Como en la última clase hay 10 hembras, entonces en la primera hay  $10 \times 32 = 320$  y en la segunda hay  $320/8 = 40$ .