Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática II, módulo 1

Examen. 03/08/2022. Duración: 2 horas.

El mínimo para aprobar es de 50 puntos.

1. (**40 puntos**) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar la matriz inversa de A.
   b) Hallar una matriz X que verifique $AX + B = C$.
   c) Hallar una matriz Y que verifique $YA = C$.

2. (**60 puntos**) Se considera una población dividida en tres clases de edad de 10 años cada una. Se tienen los siguientes datos de lo que ocurre en promedio cada 10 años.

   - Las hembras de menos de 10 años no tienen hijas, las de entre 10 y 20 años tienen dos y las de más de 20 años tienen una.
   - De las hembras de menos 10 años, sobreviven dos de cada cinco, y de las de entre 10 y 20 años, sobrevive la mitad.

   Se pide.

   a) Hallar la matriz de Leslie de la población.
   b) Indicar si la problación tiende a crecer, decrecer o estabilizarse, justificando la respuesta.
   c) Sabemos que en un momento dado hay 40 hembras de menos de 10 años, 20 de entre 10 y 20 años, y 10 de más de 20 años.
      1) ¿Cuántas van a haber en cada clase al cabo de 10 años?
      2) ¿Cuántas había en cada clase de 10 años antes?
   d) Si se sabe que a largo plazo hay 100 hembras de menos de 10 años, indicar cuántas hay en cada una de las otras dos clases de edad.

Nota: *en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.*

Solución

1. *a*) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -7 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -11 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) $AX + B = C \quad \Rightarrow \quad AX = C - B = -I \quad \Rightarrow \quad X = -A^{-1}$. Luego $X = \begin{pmatrix} -21 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

   c) $YA = C \quad \Rightarrow \quad Y = CA^{-1} \quad \Rightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -1 \\ 12 & -4 & -1 \\ 12 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. *a*) La matriz de Leslie es $L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) Es

   $$R = 0 + 2 \times 2/5 + 1 \times 2/5 \times 1/2 = 4/5 + 1/5 = 1$$

   Como es $R = 1$, entonces la problación tiende estabilizarse.

   c) 1) Es

   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

   Luego van a haber 50 hembras de menos de 10 años, 16 de entre 10 y 20 años y 10 de más de 20 años.

   2)

   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2y + z & = & 40 \\ \frac{2}{5}x & = & 20 \\ \frac{1}{2}y & = & 10 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad x = 50,\ y = 20,\ z = 0.$$

   Luego habían 50 hembras de menos de 10 años, 20 de entre 10 y 20 años y no había ninguna de más de 20 años.

   d) Como es $R = 1$, entonces el valor propio dominante es $\lambda_1 = 1$. Luego el vector propio correspondiente es

   $$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

   Como hay 100 en la primera clase, entonces van a haber $2/5 \times 100 = 40$ de entre 10 y 20 años y $1/5 \times 100 = 20$ de más de 20 años.