Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática 2. Módulo 1
Curso 2021

Nombre:
Cédula:

Parcial de Matemática II, módulo 1. Recuperación.

1. **(50 puntos).**

   a) Estudiar la invertibilidad de las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   b) Hallar la inversa de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **(50 puntos).** Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$.

   b) Calcular A^n para cualquier natural n.

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.

Solución.

1. *a*) Es $\det(A_1) = 2$ y $\det(A_2) = 0$; luego A_1 es invertible y A_2 no lo es.

   b)
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *a*) Es $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Como matrices D y P podemos tomar
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   b) Es
$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \times 2^n & -6 + 3 \times 2^{n+1} \\ 2 - 2^{n+1} & -3 + 2^{n+2} \end{pmatrix}.$$