Solución de la Tarea de Resonancia (22/09/21)

Dada:

$$A(\omega) = \frac{F_0/_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left({b\omega}/_m\right)^2}}$$

1) Calcular el valor exacto de ω para el que se alcanza la máxima amplitud, y el valor de la amplitud máxima.

Para encontrar el máximo de $A(\omega)$ buscaremos las raíces de su derivada, para ello aplicaremos la regla de la cadena.

Definimos:

$$f(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left({b\omega}/_m\right)^2$$

Entonces:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} f(\omega)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dA}{d\omega} = \frac{F_0}{m}\left(-\frac{1}{2}\right) f(\omega)^{-\frac{3}{2}} \frac{df}{d\omega}$$

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{-\omega\left(2(\omega^2 - \omega_0^2) + \left({b}/_m\right)^2\right)}{\left(\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left({b\omega}/_m\right)^2}\right)^3}$$

Considerando que la amplitud en función de la frecuencia es máxima cuando $\frac{dA}{d\omega} = 0$, tenemos:

$$\omega\left(2(\omega^2 - \omega_0^2) + \left({b}/_m\right)^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ 2(\omega^2 - \omega_0^2) + \left({b}/_m\right)^2 = 0 \end{cases}$$

(Se omite el estudio necesario para saber si se trata de máximos o mínimos relativos)

La segunda igualdad implica:

$$\omega_{Amax}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m}\right)^2 \Rightarrow \omega_{Amax} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m}\right)^2}$$

Ec. 1

Sustituyendo este valor de ω_{Amax}^2 en $A(\omega)$, tenemos:

$$\boxed{A_{max} = \frac{F_0}{b\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}}$$

Ec. 2

Puede verse que cuando $b \to 0$, $\omega_{Amax} \to \omega_0$ y $A_{max} \to +\infty$.

En el intervalo de $\omega \in (0, \omega_0)$, los máximos de A están sobre una curva cuya expresión es determinable.

Dado que $b = m\sqrt{2(\omega_0^2 - \omega_{Amax}^2)}$, entonces:

$$A_{max} = \frac{F_0}{m\sqrt{\omega_0^4 - \omega_{Amax}^4}}$$

Ec. 3

Esta función se muestra como una curva punteada de color negro en la figura 1.

2) Grafique A en función de ω.

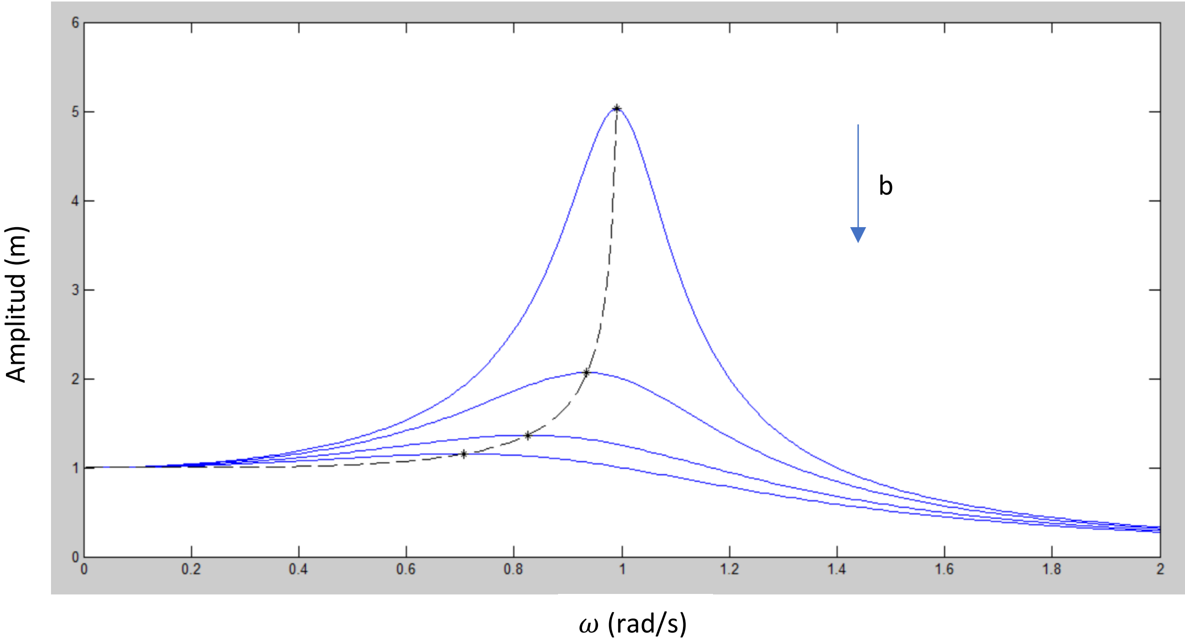

Figura 1. Amplitud de un oscilador forzado en función de la frecuencia de la fuerza impulsora. En azul (—) se muestran cuatro curvas correspondientes a diferentes valores coeficiente de fricción viscosa (b= 1.0, 0.8, 0.5 y 0.2 Kg/s, creciente en el sentido de la flecha). En todos los casos: F_0=1.0 N, m=1.0 Kg, ω_0=1.0 rad/s. Con asteriscos (*) se indican los máximos de cada curva, cuyas coordenadas fueron calculadas con las ecuaciones 1 y 2. La curva punteada (- -) corresponde a la ecuación 3. Nótese que cuanto menor sea b, ω_{Amax} se aproxima más a $\omega_0 = 1$ rad/s.