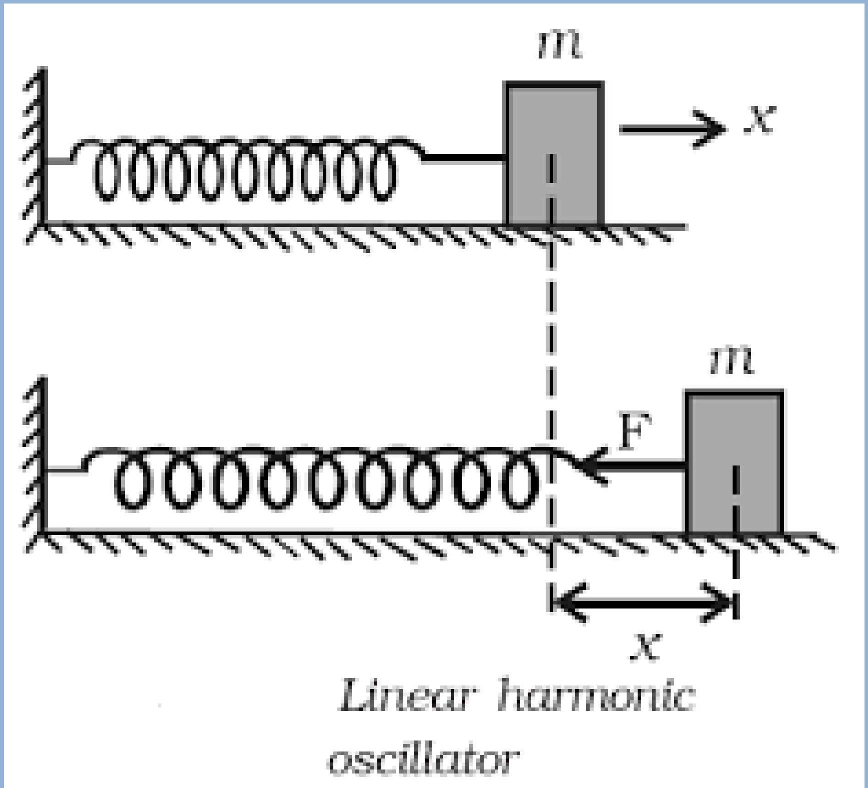
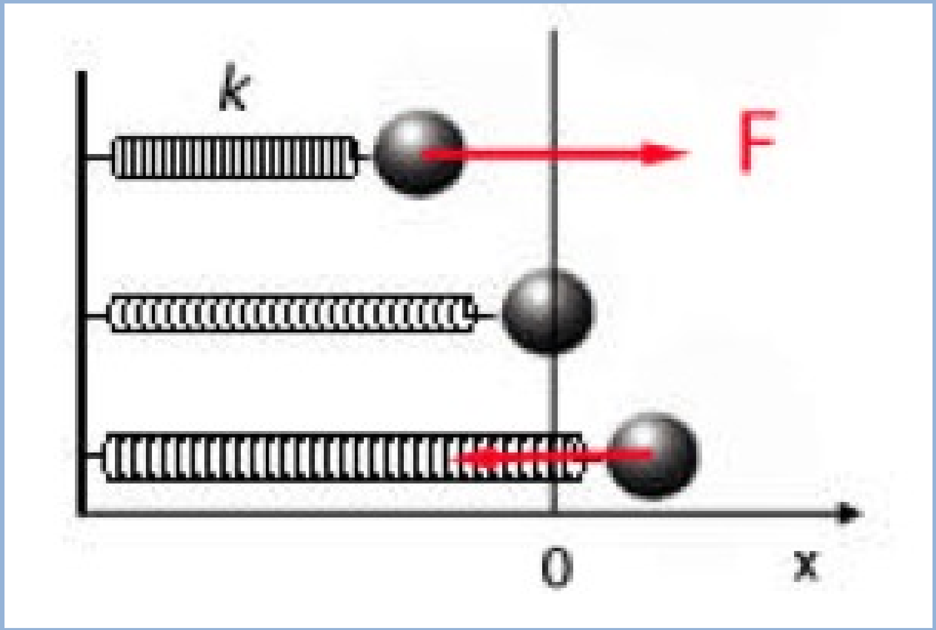
OSCILACIONES EN BIOLOGÍA

Importancia, ejemplos

MODELO CLÁSICO DE OSCILACIONES:

EL OSCILADOR ARMÓNICO


m
x
m
F
x
Linear harmonic
oscillator


k
F
0
x

ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL OSCILADOR ARMÓNICO

Segunda ley de Newton:

$$F_{total} = m\,a = -\,F_{resorte} - F_{rozamiento}$$

$$F_{resorte} = k\,x$$

$$F_{rozamiento} = c\,v$$

v : velocidad
a : aceleración
k : coeficiente del resorte
c : coeficiente de rozamiento

Reemplazando en la expresión de la segunda ley de Newton:

$$F_{total} = m\,a = -\,F_{resorte} - F_{rozamiento}$$

$$m\,a = -\,k\,x - cv$$

Como

$$v = dx/dt = x'$$

$$a = dv/dt = d^2x/dt^2 = x''$$

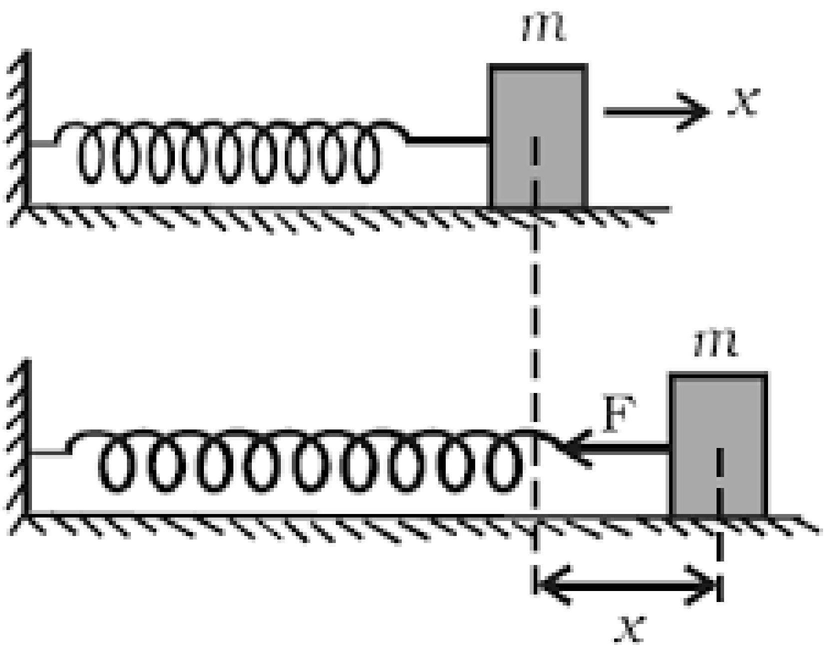
escribimos

$$m\,x'' = -\,c\,x' - kx$$

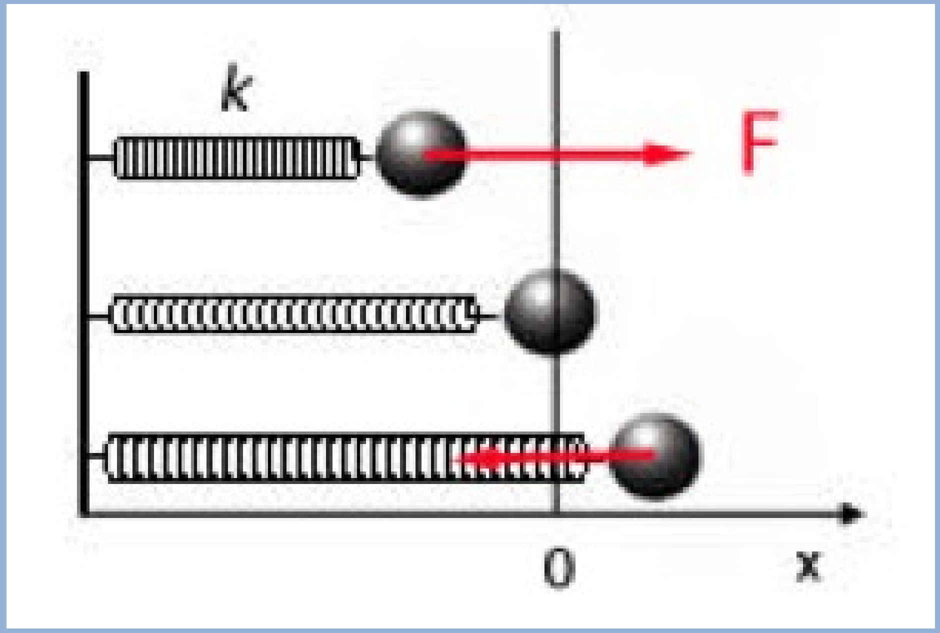
$$\rightarrow \quad m\,x'' + c\,x' + kx = 0$$

$$\rightarrow \quad x'' + (c/m)\,x' + (k/m)\,x = 0$$

REPRESENTACIONES GRÁFICAS

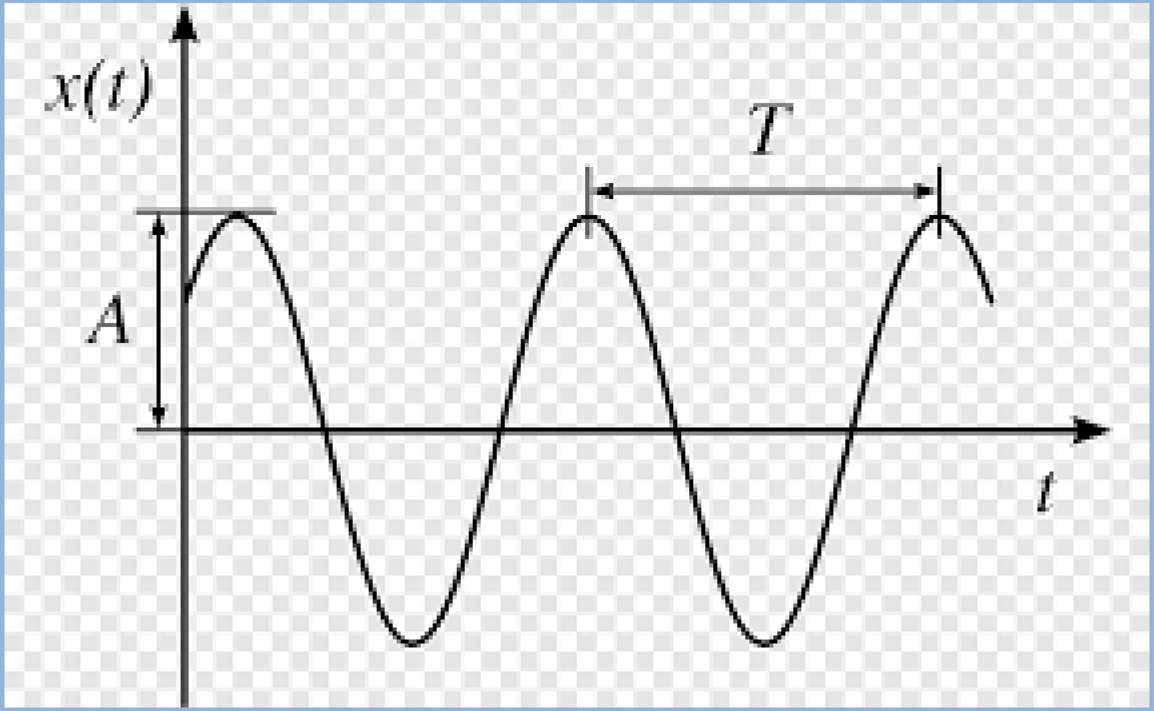


Linear harmonic oscillator



Oscilaciones sin rozamiento (c = 0)

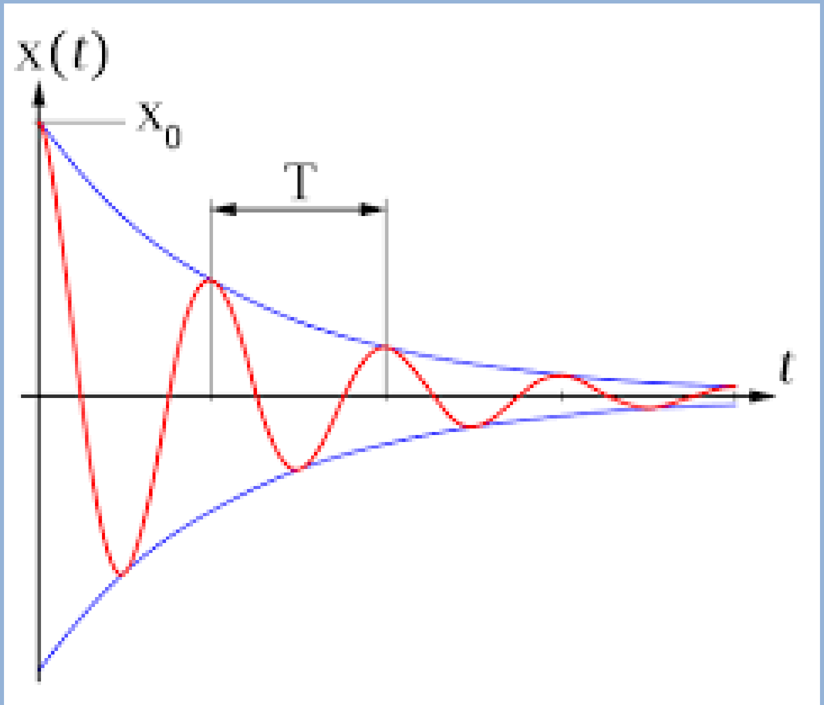
$$x'' + (k/m)\,x = 0$$



Las oscilaciones son sostenidas.

Oscilaciones con rozamiento (c > 0)

$$x'' + (c/m)\, x' + (k/m)\, x = 0$$



Las oscilaciones se van amortiguando.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL OSCILADOR ARMÓNICO

SISTEMA EQUIVALENTE

La ecuación del oscilador armónico

$$x'' + (c/m)\, x' + (k/m)\, x = 0$$

es una ODE de segundo orden.

Se define $y = x'$.

Remplazando, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales de primer orden:

$$x' = y$$
$$y' = -\,(k/m)\, x - (c/m)\, y$$

Nótese que "y" es la velocidad (x').

EJERCICIO

Determine los estados estacionarios del modelo. Esto es, obtenga pares de valores (x, y) para los cuales simultáneamente se satisfaga $x' = 0$, $y' = 0$.

¿Cuántos estados estacionarios existen?

ESTADO ESTACIONARIO

En estado estacionario:

$$x' = y^* = 0$$
$$y' = -(k/m)\, x^* - (c/m)\, y^* = 0$$

Solamente existe un estado estacionario:

$$x^* = 0$$
$$y^* = 0$$

NOTACIÓN MATRICIAL

El sistema

$$x' = y$$
$$y' = -(k/m)\,x - (c/m)\,y$$

lo reescribimos de la siguiente forma

$$x' = (0)\,x + (1)\,y$$
$$y' = -(k/m)\,x - (c/m)\,y$$

NOTACIÓN MATRICIAL (cont.)

Empleando notación matricial, escribimos

$$x' = (0)\,x + (1)\,y$$
$$y' = -\,(k/m)\,x - (c/m)\,y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k/m) & -(c/m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X' = A\,X}$$

SOLUCIÓN DE $x'' + (c/m)\, x' + (k/m)\, x = 0$

No trataremos aquí los fundamentos del procedimiento a emplear.

NOCIONES PRELIMINARES

1) Determinante de una matriz

Sea la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Su determinante es det $\mathbf{M}$ = a d – c b

2) Matriz identidad

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NOCIONES PRELIMINARES (cont.)

3) Resta de matrices

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \lambda\,\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(λ : escalar)

$$\mathbf{M} - \lambda\,\mathbf{I} = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix}$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -(k/m) & -(c/m) - \lambda \end{bmatrix} = 0 =$$

$$\lambda\,[\,(c/m) + \lambda\,] + (k/m) = 0 =$$

$$\lambda^2 + (c/m)\,\lambda + (k/m) = 0$$

(λ : valor propio de **A**)

EJERCICIO

¿Cuántos valores propios tiene la matriz **A**?

Obtenga expresiones para los mismos.

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA (cont.)

$$m\,\lambda^2 + c\,\lambda + k = 0$$

Las raíces λ_1 y λ_2 son

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2 = \frac{-\,c \pm \sqrt{c^2 - 4\,m\,k}}{2\,m}$$

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2 = \frac{-\,c}{2\,m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}}{2\,m}$$

SIGNO DEL DISCRIMINANTE

Discriminante : $\Delta = c^2 - 4\,m\,k$

$\Delta > 0$: sistema sobreamortiguado

$\Delta < 0$: sistema subamortiguado

$c = 0$: sistema no amortiguado

SOLUCIÓN GENERAL

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

EJERCICIO

Comprobar que $y(t) = x'(t)$.

Caso 1) $c^2 – 4\, m\, k > 0$

En este caso, las dos raíces λ_1 y λ_2 son reales:

$$\lambda_1 = \frac{-c}{2\,m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}}{2\,m}$$

$$\lambda_2 = \frac{-c}{2\,m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}}{2\,m}$$

Caso 1) $c^2 - 4\,m\,k > 0$ (cont.)

EJERCICIO

¿Cómo es $\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}$ respecto a c en este caso? (¿Igual, mayor o menor?)

¿Qué signo tienen λ_1 y λ_2?

Caso 1) $c^2 - 4\,m\,k > 0$ (cont.)

Como $\sqrt{c^2 - 4\,m\,k} < c$, λ_1 y λ_2 son negativas.

$$\lambda_1 = \frac{-\,c}{2\,m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}}{2\,m} = -\,\alpha$$

$$\lambda_2 = \frac{-\,c}{2\,m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}}{2\,m} = -\,\sigma$$

Caso 1) $c^2 - 4\,m\,k > 0$ (cont.)

Solución

$$\begin{cases} x(t) = A_1\, e^{\lambda_1 t} + A_2\, e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = A_1\, \lambda_1\, e^{\lambda_1 t} + A_2\, \lambda_2\, e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = A_1\, e^{-\alpha t} + A_2\, e^{-\sigma t} \\ y(t) = -A_1\, \alpha\, e^{-\alpha t} - A_2\, \sigma\, e^{-\sigma t} \end{cases}$$

Caso 1) $c^2 - 4\,m\,k > 0$ (cont.)

Solución (cont.)

Condición inicial:

$$\begin{cases} x\,(t = 0) = x_0 \\ y\,(t = 0) = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO

A partir de dicha condición inicial, obtenga las expresiones para A_1 y A_2.

Caso 1) $c^2 - 4\,m\,k > 0$ (cont.)

Solución (cont.)

Cuando t = 0,

$$\begin{cases} x = x_0 = A_1 + A_2 \\ y = 0 = -\,\alpha\,A_1 - \sigma\,A_2 \end{cases}$$

De esta condición, obtenemos

$$\begin{cases} A_1 = x_0\,\sigma / (\alpha - \sigma) \\ A_2 = x_0\,\alpha / (\alpha - \sigma) \end{cases}$$

Caso 1) $c^2 - 4\,m\,k > 0$ (cont.)

Solución (cont.)

Reemplazando A_1 y A_2 por sus expresiones, la solución es:

$$x(t) = \frac{x_0}{(\alpha - \sigma)} \left(\sigma\, e^{-\alpha t} + \alpha\, e^{-\sigma t} \right)$$

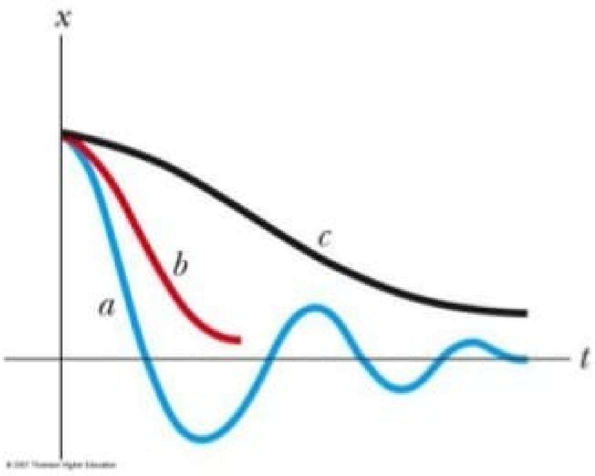
$$y(t) = -\, x_0 \, \frac{\alpha\, \sigma}{(\alpha - \sigma)} \left(e^{-\alpha t} + e^{-\sigma t} \right)$$

Caso 1) $c^2 - 4\,m\,k > 0$ (cont.)

Representación gráfica

Tipos de amortiguamiento, cont

- Gráfico de la posición en función del tiempo
  - (a) subaportiguado
  - (b) críticamente amortiguado
  - (c) sobre amortiguado
- Para el movimiento críticamente amortiguado y sobreamortiguado, no hay frecuencia



Caso 2) $c^2 - 4\,m\,k < 0$

En este caso el discriminante es negativo. Escribimos

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2 = \frac{-\,c}{2\,m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4\,m\,k}}{2\,m} =$$

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2 = \frac{-\,c}{2\,m} \pm \frac{\sqrt{-\,\theta}}{2\,m} =$$

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2 = \frac{-\,c}{2\,m} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\theta}}{2\,m} = -\,\gamma \pm i\,\varphi$$

Caso 2) $c^2 - 4\,m\,k < 0$ (cont.)

En este caso, entonces, los valores propios λ_1 y λ_2 son los números complejos conjugados

$$\lambda_1 = -\gamma - i\,\varphi$$

$$\lambda_2 = -\gamma + i\,\varphi$$

con parte real $-\gamma$ y parte imaginaria φ.

EJERCICIO

¿Cómo son λ_1 y λ_2 cuando $c = 0$?

Caso 2) $c^2 - 4\,m\,k < 0$ (cont.)

Cuando $c = 0$ (sistema sin rozamiento), $\varphi = 0$.

Entonces

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2 = \frac{-\,c}{2\,m} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\theta}}{2\,m} = -\,\gamma \pm i\,\varphi =$$

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2 = \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\theta}}{2\,m} = \pm\, i\,\varphi$$

y λ_1 y λ_2 son imaginarias puras.

Caso 2) $c^2 - 4\,m\,k < 0$ (cont.)

Solución

En este caso, la posición [x(t)] está dada por

$$x(t) = A_1\, e^{\lambda_1 t} + A_2\, e^{\lambda_2 t} =$$

$$x(t) = A_1\, e^{(-\gamma - i\varphi)\, t} + A_2\, e^{(-\gamma + i\varphi)\, t} =$$

$$x(t) = A_1\, e^{-\gamma t} e^{-i\varphi t} + A_2\, e^{-\gamma t} e^{+i\varphi t} =$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\, (A_1\, e^{-i\varphi t} + A_2\, e^{+i\varphi t})$$

Caso 2) $c^2 - 4\,m\,k < 0$ (cont.)

Solución (cont.)

Empleando la fórmula de Euler

$$e^{(a + i\,b)} = e^{a}\,(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

escribimos

$$x(t) = e^{-\gamma t}\,(A_1\, e^{-i\varphi t} + A_2\, e^{+i\varphi t}) =$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\,[\,(A_1\,(\cos \varphi t - i \operatorname{sen} \varphi t) +$$

$$+ A_2\,(\cos \varphi t + i \operatorname{sen} \varphi t)\,]$$

Caso 2) $c^2 - 4\ m\ k\ < 0$ (cont.)

Solución (cont.)

Para obtener el resultado final, tenemos en cuenta que A_1 y A_2 son números complejos conjugados:

$$A_1 = U + i\,W$$
$$A_2 = U - iW$$

A partir de esta consideración, obtenemos la siguiente expresión para la solución de x(t)

$$x(t) = 2\,e^{-\gamma t}\,(U \cos \varphi t + W \operatorname{sen} \varphi t)$$

donde U y W son parámetros dependientes de las condiciones de contorno.

Caso 2) $c^2 - 4\,m\,k < 0$ (cont.)

Solución (cont.)

En el caso que $\gamma = 0$ (por ser $c = 0$)

$$x(t) = 2\,(U \cos \varphi t + W \operatorname{sen} \varphi t)$$

$$y(t) = x'(t) = 2\,\varphi\,(-\,U \operatorname{sen} \varphi t + W \cos \varphi t)$$

Cuando $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$. Las expresiones son:

$$x(t) = x_0 = 2\,U \;\rightarrow\; U = x_0 / 2$$

$$y(t) = y_0 = 2\,\varphi\,W \;\rightarrow\; W = y_0 / 2\,\varphi$$

Caso 2) $c^2 - 4\,m\,k < 0$ (cont.)

Solución (cont.)

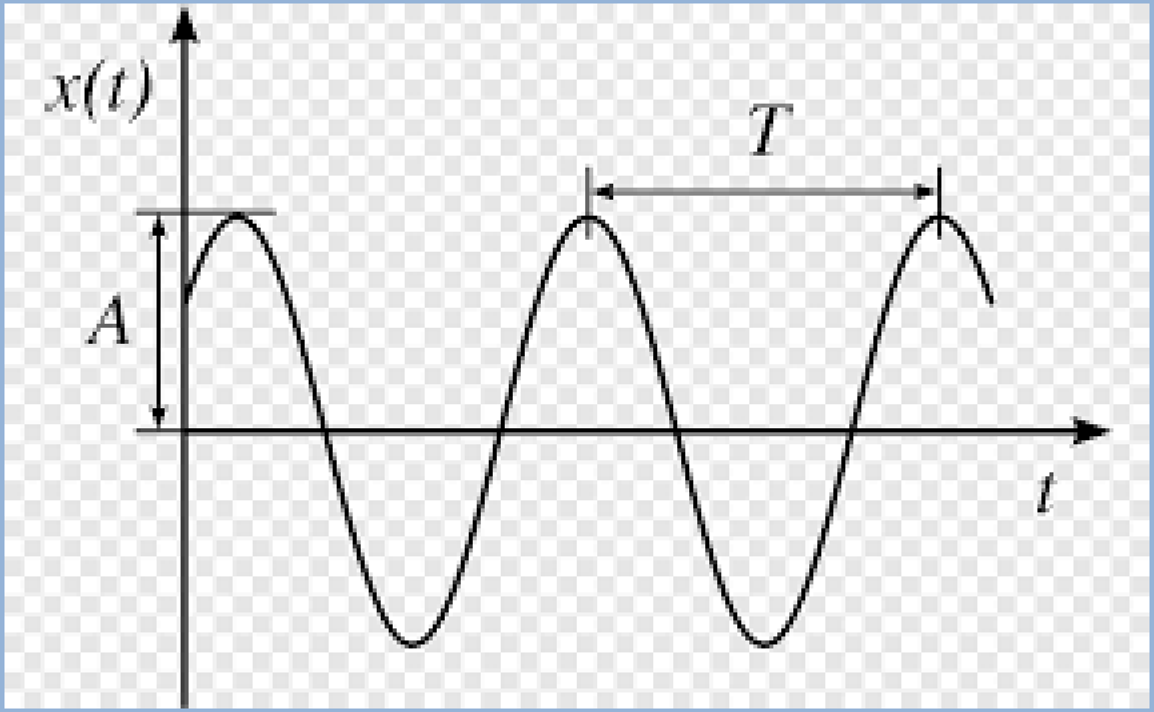
Cuando $y_0 = 0$, $W = 0$, y el modelo completo se simplifica a

$$x(t) = e^{-\gamma t}(x_0 \cos \varphi t)$$

$$y(t) = x'(t) = -\varphi\, e^{-\gamma t}(x_0 \operatorname{sen} \varphi t)$$

REPRESENTACIONES GRÁFICAS

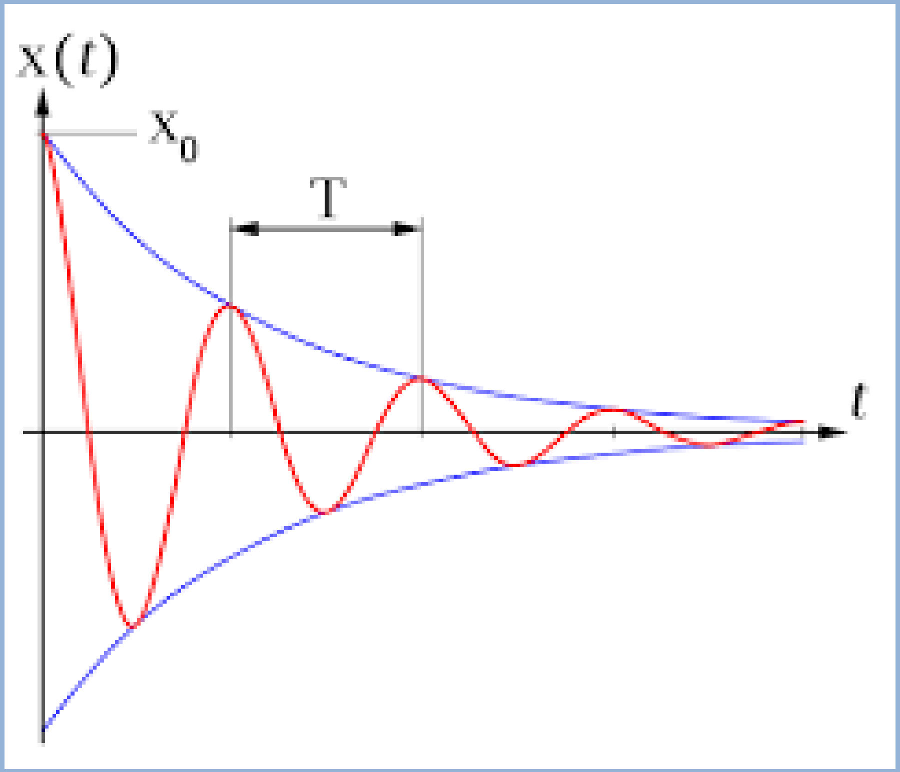
Oscilaciones sin rozamiento (c = 0)



Las oscilaciones son sostenidas.

T es el período (T = 2π / φ) y A la amplitud.

Oscilaciones con rozamiento (c > 0)



Las oscilaciones se van amortiguando.

La envolvente es $e^{-\gamma t}$.