RELATIVIDAD GENERAL 2021 Clase 12 Michael Reisenberger

Metrica, tiempo propio y distancia en relatividad especial

Supongamos que hay un relój en reposo en un referencial inercial especial. Puede ser un reloj atómico con átomos de cesio que resuenan con radiación EM en la frecuencia de la transicion entre el primer nivel exitado y el fundamental del átomo, o puede ser una coleccion de partículas que decaen con vida media dada, como nucleos radioactivos o muones.

Según la invariansa bajo transformaciones Lorentz propios de las leyes de física pueden construirse relojes identicos en reposo en cualquier otro referencial Lorentziano

- Ahora en adelante vamos a llamar "referencial Lorentziano" a los referenciales inerciales especiales.

Entonces hay, o puede haber, un reloj con cualquier velocidad tal que existe un referencial Lorentz con esta velocidad.

Def^n El tiempo propio entre dos eventos (puntos espacio temporales) P_1 y P_2 es el tiempo de viaje marcado por un reloj que viaje desde P_1 hasta P_2 con velocidad constante.

En un referencial y^θ tal que P_1 y P_2 tienen las mismas coordenadas espaciales ($\Delta y^l = y^l(P_2) - y^l(P_1) = 0 \quad l = 1,2,3$) el reloj que viaja de P_1 a P_2 permanece en reposo.

Así el tiempo que mide es $\tau = \Delta y^0 = y^0(P_2) - y^0(P_1)$ y

$$\tau^2 = (\Delta y^0)^2 = (\Delta y^0)^2 - (\Delta y^1)^2 - (\Delta y^2)^2 - (\Delta y^3)^2$$

$$= -\eta_{\theta\Xi}\,\Delta y^\theta \Delta y^\Xi$$

Esto es una manera complicada de escribir $(\Delta y^0)^2$, pero tiene la ventaja que $\eta\Delta\Delta$ es invariante bajo transformaciones Lorentz. Es decir

$$\tau^2 = -\eta_{\theta\Xi}\,\Delta y^\theta \Delta y^\Xi = -\eta_{\alpha\beta}\,\Delta z^\alpha \Delta z^\beta$$

Con z^α cualquier coordenadas Lorentzianas y $\Delta z^\alpha = z^\alpha(P_2) - z^\alpha(P_1)$.

Nota que $\tau^2 = (\Delta z^0)^2 - (\Delta z^1)^2 - (\Delta z^2)^2 - (\Delta z^3)^2$

$$= (\Delta z^0)^2 (1 - \vec{v}^2)$$

con $v^i = \frac{\Delta z^i}{\Delta z^0}$ es la 3-velocidad del reloj en z.

$\Rightarrow$ Si una partícula decae en un tiempo τ en su referencial de reposo, entonces esto lleva un tiempo

$$\Delta z^0 = \gamma \tau \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

en z. Esto es la famosa dilatación del tiempo relativista.

Hartle Box 4.4

- Este efecto es muy bien comprobado. Un experimento muy directo fue hecho en CERN (1977) con muones: — un muon es una partícula muy como un electrón pero de masa mucho mayor (105 MeV) e inestable

Un muon en reposo decae en un tiempo promedio de

$$\tau = 2.19698 \ \mu s$$

En el experimento los muones μ^- (e antimuones μ^+) circulaban en un circulo de radio 14 m con velocidad muy cerca a la de luz, tal que $\gamma = 29.3$ y se observo que su vida promedio era $\Delta t = 64.419 \pm 0.058 \ \mu s$ en el referencial del laboratorio.

$$\frac{\Delta t - \gamma \tau}{\Delta t} = 0 \pm 0.09\%$$

Así la prueba confirma bien la predicción de relatividad especial.

Tal como las leyes de física admiten relojes en reposo también admiten reglas en reposo que se pueden usar para medir distancias. Relatividad especial requiere que se pueden construir reglas identicas en todo referencial Lorentziano.

Def^n La distancia propia entre eventos P_3 y P_4 es la distancia medido entre ellos con una regla en reposo en un referencial Lorentziano y^μ en el cual P_3 y P_4 son simultaneos, $y^0(P_4) = y^0(P_3)$, si existe tal referencial.

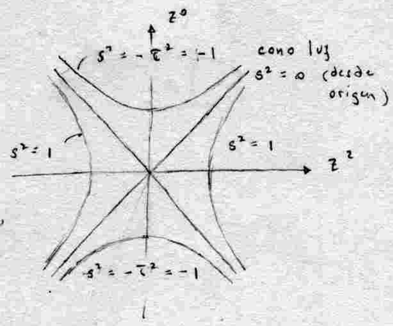
La distancia propia s es determinado por

$$s^2 = (\Delta y^1)^2 + (\Delta y^2)^2 + (\Delta y^3)^2 = \eta_{\alpha\beta} \Delta y^\alpha \Delta y^\beta \qquad \text{— ya que } \Delta y^0 = 0$$

$$= \eta_{\alpha\beta} \Delta z^\alpha \Delta z^\beta$$

La mismo expresión $\eta_{\alpha\beta}\,\Delta z^\alpha \Delta z^\beta$ da el valor de s^2 y de $-\tau^2$. Pero por sus definiciones en terminos de relojes y reglas es claro que para un desplazamiento entre dos eventos distintos o $s^2 > 0$ o $\tau^2 > 0$. Entonces estas definiciones aplican en situaciones mutuamente excluyentes.

- Si $\tau^2 > 0$ se dice que los eventos tienen separacion tipo tiempo.
- Si $s^2 > 0$ tienen separación tipo espacio
- Es fácil verificar que si dos eventos tienen separacion tipo tiempo entonces existe un referencial Lorentz y^0 tal que $\Delta y^i = 0$, y si tienen separación tipo espacio entonces existe un referencial Lorentz tal que son simultaneos en el.
- Si $\eta_{\alpha\beta}\,\Delta z^\alpha \Delta z^\beta = 0$ con $\Delta z^\alpha = z^\alpha(P_6) - z^\alpha(P_5)$ entonces P_6 y P_5 coinciden o se pueden conectar por un rayo de luz ⟵ esto fue nuestro punto de partida en la ultima clase
  Entonces se dice que P_6 y P_5 tienen una separacion tipo luz.
- Ahora en adelante vamos a escribir $s^2 = -\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\Delta z^\alpha \Delta z^\beta$ si s^2 es >0, 0, <0.
  Es decir, extendemos la definición de s^2 y τ^2 mas alla de las definiciones en terminos de reglas y relojes.



- $s^2 = -(\Delta z^0)^2 + (\Delta z^1)^2 + (\Delta z^2)^2 + (\Delta z^3)^2$
  es claramente analogo a la distancia en geometría Euclidea, ∴ coordenadas Lorentzianas son analogas a coordenadas cartesianas, y transformaciones de Lorentz a rotaciones

<u>Metrica</u>

- Para construir un formalismo generalizable al caso con gravedad, en el cual no hay referenciales inerciales globales, pasemos a considerar desplazamientos infinitesimales. Estos tienen longitud y tiempo propio dado por

$$ds^2 = -d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dz^\alpha dz^\beta$$

Esto se llama el "elemento de linea" y a menudo se especifica geometrias dando el elemento de linea.

- El elemento de linea es equivalente a un tensor $\left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]$ simétrico g llamado la <u>metrica</u>.
- La metrica definida por η se llama la metrica de Minkowski. Cuando el campo gravitatorio es no trivial el elemento de linea y la correspondiente metrica son otros.

Si $v = \frac{d}{d\lambda}$

$$g(v,v) = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{dz^\beta}{d\lambda} = \eta_{\alpha\beta}\, dz^\alpha(v)\, dz^\beta(v) = \eta_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta$$

porque $v^\alpha = dz^\alpha(v)$ son los componentes de v en la carta z.

- Esta igualdad alcanza para determinar tambien $g(u,v)$ con $u \neq v$ por la postulada simetría de g:

$$g(u+v,u+v) - g(u-v,u-v) = 2\,(g(u,v)+g(v,u)) \underset{\text{simetría}}{=} 4\,g(u,v)$$

Entonces $\quad g(u,v) = \eta_{\alpha\beta}\, u^\alpha v^\beta$

Esto define g completamente y muestra que es un tensor $\left[{0 \atop 2}\right]$, una mapa bilineal de un par de vectores a un escalar.

- poniendo $u = \partial_\alpha$ y $v = \partial_\beta$ vemos $g_{\alpha\beta} \equiv g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = \eta_{\alpha\beta}$. Así $\eta_{\alpha\beta}$ son los componentes de g en coordenadas Lorentzianas. Por supuesto g tiene otros componentes en otras cartas.

- Es tentador llamar a la métrica de Minkowski η, pero prefiero guardar el nombre η para la matriz $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Curvas parametrizadas por τ</u>

- Es natural parametrizar líneas mundo de partículas con tiempo propio τ. τ es el tiempo medido por un reloj que acompaña a la partícula (o que es la partícula como en el caso de los muones en CERN.)

  - Un reloj real acompañando una partícula que acelera solo va medir τ si no esta afectada por la aceleración y tiene siempre el mismo período como si estuviera moviendo con la velocidad de la partícula pero con aceleración cero. El grado hasta que se cumple esto depende de la construcción del reloj.

Si λ es un parametro cualquiera sobre la línea mundo C entonces

$$\tau = \int_C d\tau \equiv \int_C \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\, dz^\alpha dz^\beta} = \int_C \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{dz^\beta}{d\lambda}}\; d\lambda$$

Vamos a usar λ que crece hacia el futuro; $\frac{dz^0}{d\lambda} > 0$, y vamos a tomar la raíz positiva en el integrando. Así

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{dz^\beta}{d\lambda}} > 0$$

Note que si $\lambda = \tau \Rightarrow 1 = \left(\frac{d\tau}{d\tau}\right)^2 = -\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\tau}\frac{dz^\beta}{d\tau}$

$\therefore\ u = \frac{d}{d\tau}\Big|_C$ es la 4-velocidad de C

Acabamos de ver que $g(u,u) = \eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1$

— $u^\alpha = \frac{dz^0}{d\tau}\frac{dz^\alpha}{dz^0} = u^0\begin{bmatrix}1\\ \vec{v}\end{bmatrix}$ con $v^i = \frac{dz^i}{dz^0}\Big|_\gamma$ = 3-velocidad de C

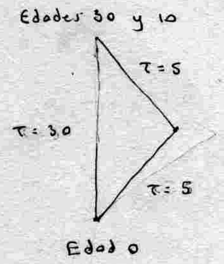
$\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1 \Rightarrow u^{0\,2}(1-\vec{v}^2) = 1 \Rightarrow u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma$ ← porque $u^0 = \frac{dz^0}{d\tau} > 0$

$\Rightarrow u^\alpha = \gamma\begin{bmatrix}1\\ \vec{v}\end{bmatrix}$

La acción para una partícula

Las partículas libres tienen líneas mundo rectas en cartas Lorentzianas ya que estas son cartas inerciales globales. Estas rectas son puntos estacionarios del tiempo propio de la línea mundo. De hecho la recta es la línea mundo de tiempo propio más largo entre dos eventos (si estos tienen separación tipo tiempo)

- Esto es análogo, pero un poco distinto, a la situación en geometría Euclidea en que la recta es el camino más corto.
- La famosa paradoja de los gemelos es una manifestación de este principio



$\Rightarrow$ se puede usar τ como acción para partículas libres. Para que funcione cuando se agregan interacciones se usa

$$I = -m\int d\tau$$

como acción para la partícula libre, con m la masa en reposo de la partícula.

Veremos como funcion esto:

Si λ es un parametro arbitrario de la línea mundo que tiene valores $\lambda = 0$ en el evento inicial P_0 y $\lambda = 1$ en el evento final P_1 entonces

$$I = -m \int_0^1 \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dz^\alpha}{d\lambda} \frac{dz^\beta}{d\lambda}} \, d\lambda$$

Así $L = -m \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} \frac{dz^\alpha}{d\lambda} \frac{dz^\beta}{d\lambda}}$ es el Lagrangiano, y λ juega el rol de tiempo.

$$\delta I = \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} \delta z^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha} \delta \dot{z}^\alpha \, d\lambda \quad \text{——— con } \dot{x} \equiv \frac{dx}{d\lambda}$$

$$= \left[p_\alpha \delta z^\alpha \right]_0^1 + \int_0^1 \left(-\dot{p}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} \right) \delta z^\alpha \quad \text{——— con } p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha}$$

Exigiendo que $\delta I = 0$ para todas variaciones tales que $\delta z^\alpha = 0$ $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ (que dejan fijos los eventos P_0 y P_1) implica

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} \quad \text{——— como segunda ley de Newton}$$

y para soluciones de esta ecuacion $\delta I = \left[p_\alpha \delta z^\alpha \right]_0^1$ bajo variaciones cualesquiera.

En otras palabras, si definimos $\bar{I}(z_0, z_1)$ como I evaluado en la solucion que va desde $z_0^\alpha = z^\alpha(P_0)$ a $z_1^\alpha = z^\alpha(P_1)$ entonces $p_\alpha(P_1) = \frac{\partial \bar{I}}{\partial z_1^\alpha}$ $p_\alpha(P_0) = -\frac{\partial \bar{I}}{\partial z_0^\alpha}$

Volviendo a la partícula relativista libre tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial z^\alpha} = 0 \quad \text{y} \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha} = \cancel{-} m \cancel{\tfrac{1}{2}} \frac{\cancel{-2}\, \eta_{\alpha\beta} \dot{z}^\beta}{\sqrt{-\eta_{\gamma\delta} \dot{z}^\gamma \dot{z}^\delta}}$$

$$= m\, \eta_{\alpha\beta} \frac{dz^\beta}{d\lambda} \Big/ \frac{d\tau}{d\lambda}$$

$$= m\, \eta_{\alpha\beta} \frac{dz^\beta}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta}\, m u^\beta$$

$p^\beta = m u^\beta = m\gamma \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ es el 4-momentum de la partícula

La cantidad p_α que aparece como el momento canónico en el formalismo Lagrangiano es

$$p_\alpha = \eta_{\alpha\beta} p^\beta$$

Se obtiene "bajando el indice con la metrica"

En general si se tiene un vector v entonces con la metrica g se puede armar un covector $g(\cdot, v)$. Es decir, es el mapa lineal de vectores que mapea $w \in T_p$ al escalar $g(w, v)$.
Los componentes de $g(\cdot, v)$ son $g_{\mu\nu} v^\nu$ y se escriben v_μ.

- Esto presenta un problema si queremos hablar del covector y no de sus componentes. Claro que se puede tomar la actitud que v_α y v^β son los componentes covariantes y contravariantes del mismo objeto v.

Nota que
$$p^0 = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{1}{2} m v^2 + O(v^4)$$
$$p^i = \gamma m v^i = m v^i + O(v^3)$$

Restaurando la velocidad de la luz c da

$$E_c \equiv p^0 c^2 = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) \longleftarrow c \text{ por "clasica"}$$
$$p^i_c = p^i c = m v^i + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^3\right)$$

- En la mecanica relativista se supone que p^α es conservada en interacciones entre particulas.
    - la conservacion de p^i corresponde en limite $\frac{v}{c} \to 0$ a conservacion de momento lineal en teoría de Newton
    - la conservacion de p^0 corresponde a una combinacion de conservacion de masa (o de particulas) y la conservación de energía cinetica en la teoría Newtoniana

- estas 4 leyes de conservacion son bien comprobadas empiricamente en los experimentos con particulas en colisionadores y en otros ambientes

- Es una prediccion extraordinaria de relatividad especial que un cambio de la energía en reposo de una particula - como la perdida de energía de un átomo que cae de un estado exitado al estado fundamental - se refleje en un cambio de su inercia. En la teoria de Newton la energia interna (mc^2 aquí) no tiene conexion con la masa inercial.