Ejercicios de practico 3 – Relatividad General

1. Hartle problemas 4.19, 4.18, 4.13, 4.12, 4.11

2. **Estacionamiento en Tokyo**: Para poder comprar un auto en Tokyo hay que demostrar a las autoridades que tenes garaje en que estacionarlo y que el auto entra en el garaje. Un estudiante de relatividad a quien le gusta un auto grande $L = 5\ m$ de largo piensa usar la contracción relativista de longitudes. Para hacerlo entrar en su garaje de $4\ m$.

a) ¿Cuan rápidamente tiene que mover el auto relativo al garaje para que su longitud en el referencial del garaje de L/γ es $4\ m$? En el referencial de reposo del auto es el garaje que esta contraído, a una longitud de $4\,m/\gamma$. ¿Como es que el auto puede caber en el garaje en el referencial de este, pero claramente no puede en el referencial del auto? Realiza un diagrama espacio-temporal mostrando el auto y el garaje.

Para que el auto queda en el garaje y no sigue de largo el estudiante pone una pared trasero fuerte para parar el auto (y bolsas de aire para el conductor). Parar la parte delantera del auto va frenar la parte trasera, pero no instantáneamente - las fuerzas no pueden transmitirse mas rápido que la luz.

b) Si la parte delantera del auto para cuando impacta en la pared trasera del garaje en tiempo $t=0$ del referencial del garaje, ¿Cuando es el primer momento en que la parte trasera del auto puede empezar a frenarse? ¿Cuan largo es el auto en este momento medido en el referencial del garaje?

Porque no se puede despreciar el tiempo de propagación de señales el concepto de cuerpo rígido es problemático en relatividad especial. Si uno provee cada parte de un cuerpo con propulsión propia adecuadamente programada es posible hacer un cuerpo ejecutar un movimiento rígidamente, tal como un escuadrón de aviones pueden mantener una formación rígida, pero aun esto presenta problemas para algunos movimientos, como una rotación con velocidad angular no constante, por la contracción de Lorentz.

3. **Acción para partículas libres, incluido los de masa cero**:

a) Demuestre que la acción $I=-m\int d\tau=-m\int\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}}\,d\lambda$ para una partícula libre reduce en el limite de velocidades bajas a la acción $\int\frac{1}{2}mv^2dt$ de una partícula libre Newtoniana, mas un constante. Aquí λ es un parámetro arbitrario sobre el segmento de linea mundo (que toma los valores λ_0 y λ_1 en el comienzo y el fin del segmento), $\dot{z}=\frac{dz}{d\lambda}$, $t=z^0$ el tiempo de un referencial de Lorentz, y $v^i=\frac{dz^i}{dt}$ es la 3-velocidad en el mismo referencial.

La acción $I=-m\int d\tau$ no funciona para partículas con masa cero. Una generalización que funciona para todas las masas es la siguiente:

$I=\frac{1}{2}\int\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^{\alpha}\dot{z}^{\beta}\varphi-\frac{m^2}{\varphi}d\lambda$ con φ un campo escalar.

b) El caso $m>0$. Encuentra el valor de φ en cada punto de la linea mundo tal que la acción es estacionaria bajo variaciones de φ . Sustituyendo este valor en la acción demuestre que se recupera a la acción $I=-m\int d\tau$.

c) El caso $m=0$. Escribe las ecuaciones que resultan de exigir que la acción es estacionario bajo variaciones de φ y la linea mundo, manteniendo fijos a los extremos.

d) En los dos casos definí el parámetro $\theta=\int\frac{1}{\varphi}d\lambda$ y demuestre que
   1. el momento canónico es $p_\alpha=\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\beta}{d\theta}$. Demuestre que
   2. esta expresión reduce a $\eta_{\alpha\beta}m\frac{dz^\beta}{d\tau}$ en el caso $m>0$.
   3. el momento es conservado, $\frac{d\theta}{dz^0}$ es constante, y por tanto $\theta=az^0+b$ con a y b constantes.
   4. la estacionariedad de la acción bajo variaciones de φ requiere que $p^2\equiv p^\alpha p_\alpha=-m^2$. *Nota que esta ultima es la famosa relación de dispersión* $E^2-\vec{p}^2=m^2$.

e) Si se toma el tiempo z^0 de un referencial de Lorentz como el parámetro λ muestre que sobre puntos estacionarios de la acción φ es constante e igual a la energía de la partícula en este referencial.

4. **Una acción extra sencilla apta para algunos propósitos**

Si lo único que se quiere es una acción cuyos puntos estacionarios son rectas (o geodésicas en espacios curvos métricas) entonces la acción sencilla $\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu d\lambda$ sirve. Por ejemplo, esta acción provee un modo rápido de calcular símbolos de Christoffel dada la métrica.

a) Demuestra que los puntos estacionarios de esta acción son las geodésicas de la conexión Levi-Civita (la conexión métrica).

b) El elemento de linea de Schwarzschild en coordenadas esféricas t,r,θ,ϕ es

$$ds^2=-(1-2M/r)dt^2+(1-2M/r)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$$

Calcule la ecuación de geodésicas en esta geometría a partir de la ecuación de Euler-Lagrange, y de esto deduzca los símbolos de Christoffel no ceros.

Nota, sin embargo, que el cuadrado del momento canónico de esta acción no esta determinado por la masa pero solo por las elecciones de λ *en los puntos inicial y final del segmento de linea mundo. Esta acción no puede ser incorporada sin cambios como término en acciones para partículas con interacciones.*