SOLUCIONES

Practico 2, problema 12

a) Sea v_P la tangente de la geodesica en P, y v^α son los componentes de v en la base $e_{(\alpha)}$: $v_P = v_P^\alpha e_{(\alpha)}$.

- Un punto cualquiera Q sobre la geodesica tiene entonces coordenadas

$$z^\alpha(Q) = \lambda(Q)\, v_P^\alpha$$

con $\lambda(Q)$ el valor del paramatro afín λ de la geodesica en Q.

Los componentes del tangente en Q son

$$\frac{dz^\alpha}{d\lambda} = v_P^\alpha \quad \text{— constantes}$$

– es decir, son iguales a las componentes en P

Visto que es una geodesica debe valer

$$0 = \frac{d^2 z^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dz^\beta}{d\lambda}\frac{dz^\gamma}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2 z^\alpha}{d\lambda^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v_P^\beta v_P^\gamma$$

Multiplicando por λ^2 da $\quad 0 = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} z^\beta z^\gamma$

Esto vale sobre toda geodesica por P y entonces en todo el dominio de la carta.

Ademas vale $\quad 0 = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(P)\, v_P^\beta v_P^\gamma \quad \forall\, v_P \in T_P$

Diferenciando esto dos veces en v_P da $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(P) = 0$ (porque $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ es simetrico en β,γ).

b) $$v_P^\alpha = \frac{dz^\alpha}{d\lambda}\Big|_P = v_P^\beta e^\mu_{(\beta)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} z^\alpha \Big|_P \quad \forall\, v_P^\gamma$$

$$\Rightarrow \quad e^\mu_{(\beta)} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu}\Big|_P = \delta^\alpha_\beta \,, \quad \text{así} \quad \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu}\Big|_P \text{ es el inverso de } e^\mu_{(\alpha)}$$

$dz^\alpha[e_{(\beta)}] \equiv e^\mu_{(\beta)}\,\partial_\mu z^\alpha = \delta^\alpha_\beta$, así dz^α es dual a $e_{(\beta)}$

Además esto muestra que, los componentes en la base de coordenadas ∂_α asociada a la carta z de $e_{(\beta)}$ son $e^\alpha_{(\beta)} = \delta^\alpha_\beta$. Entonces

$$e_{(\beta)} \equiv e^\alpha_{(\beta)}\,\partial_\alpha = \delta^\alpha_\beta\,\partial_\alpha = \partial_\beta$$

práctico 2. problema 11

$$\nabla\cdot\bar{v} = \partial_i v^i = \frac{\partial c^p}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial c^p}\left[\frac{\partial x^i}{\partial c^q}v^q\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\partial c^p}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial c^q}}_{\delta^p_q}\,\partial_p v^q + \frac{\partial c^p}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial c^p\partial c^q}v^q$$

$$= \partial_p v^p + \Gamma^p_{pq}v^q$$

Los únicos $\frac{\partial x^i}{\partial c^q\partial c^l}$ que no son cero son

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\phi} = -\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\phi^2} = -r\cos\phi$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r\partial\phi} = \cos\phi \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\phi^2} = -r\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial c^p} = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline r & \cos\phi & \mathrm{sen}\,\phi & 0 \\ \phi & -r\,\mathrm{sen}\,\phi & r\cos\phi & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \frac{\partial c^p}{\partial x^i} = \begin{array}{c|ccc} & r & \phi & z \\ \hline x & \cos\phi & -\frac{1}{r}\mathrm{sen}\,\phi & 0 \\ y & \mathrm{sen}\,\phi & \frac{1}{r}\cos\phi & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Gamma^p_{pq} = \frac{\partial r}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial r\,\partial c^q} + \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial\phi\,\partial c^q}$$

$$= \cancel{\cos\phi\,(-\mathrm{sen}\,\phi)}\,\delta^\phi_q + \cancel{\mathrm{sen}\,\phi\,(\cos\phi)}\,\delta^\phi_q + \cancel{(-\tfrac{1}{r}\mathrm{sen}\,\phi)(-r\cos\phi)}\,\delta^\phi_q$$

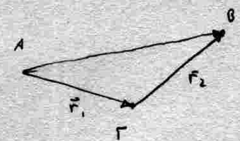
$$+ (-\tfrac{1}{r}\mathrm{sen}\,\phi)(-\mathrm{sen}\,\phi)\,\delta^r_q + \tfrac{1}{r}\cancel{\cos\phi\,(-r\,\mathrm{sen}\,\phi)}\,\delta^\phi_q + \tfrac{1}{r}\cos\phi\cos\phi\,\delta^r_q$$

$= \frac{1}{r}\delta^r_q \leftarrow \Gamma^p_{pr} = \frac{1}{r}$. Los demás Γ^p_{pq} son cero.

$$\Rightarrow \nabla\cdot\bar{v} = \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{\partial v^\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v^z}{\partial z} + \frac{1}{r}v^r$$

2 Hartle 4.12

a) Considere una curva que consiste de dos segmentos rectos, representados por vectores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$



La longitud A hasta B por la recta entre los dos es

$$s_{AB} = |\vec{r}_1 + \vec{r}_2|$$

$$s_{AB}^2 = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)^2 = \vec{r}_1^{\,2} + \vec{r}_2^{\,2} + 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2$$

$$\leq \|\vec{r}_1\|^2 + \|\vec{r}_2\|^2 + 2|\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2|$$ — igualdad si $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 \geq 0$

$$\leq \|\vec{r}_1\|^2 + \|\vec{r}_2\|^2 + 2\|\vec{r}_1\|\|\vec{r}_2\|$$ — por Cauchy - igualdad solo si $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$

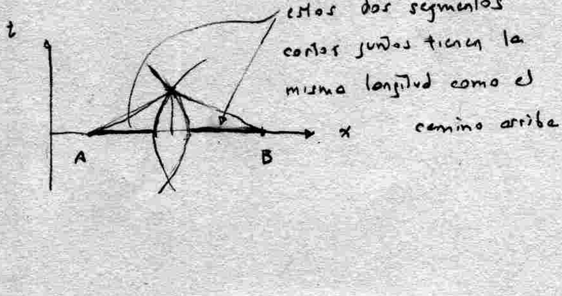
$$= (\|\vec{r}_1\| + \|\vec{r}_2\|)^2$$

$$= s_\Gamma^2$$

Así $s_{AB} < s_\Gamma$ salvo si $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$. En este caso Γ y la recta AB coinciden

-- Esto implica que cualquier cadena de rectas conectando A con B es mas largo que la recta AB.

b) La recta espacial entre dos puntos con separación tipo espacio no es el camino mas corto entre ellos en geometría de Minkowski. Se puede acortar el camino andando al futuro y volviendo



4.18

Sean P y Q los eventos. Move el origen para que coincida con P y gira los ejes espaciales hasta que $\vec{PQ}$ esta en el plano t,x (o z^0, z^1).

a) si PQ es tipo tiempo $t^2 - x^2 > 0$ donde t y x son las coordenadas de Q

Sea entonces $\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$ $\quad \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - \left(\frac{x}{\tau}\right)^2 = 1 \Rightarrow \exists \psi$ tal que $\cosh\psi = \frac{t}{\tau}$ $\sinh\psi = \frac{x}{\tau}$

- elegimos P como el evento mas temprano, asi $t > 0$

- Ahora hacemos el boost

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\psi \\ \sinh\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efectivamente los eventos tienen las mismas coordenadas espaciales en el nuevo referencial

b) si $\vec{PQ}$ es tipo espacio $x^2 - t^2 > 0$. Sea $s = \sqrt{x^2 - t^2}$

$\left(\frac{x}{s}\right)^2 - \left(\frac{t}{s}\right)^2 = 1$. Podemos elegir los ejes espaciales tal que $x > 0$

$\Rightarrow \exists \psi$ tal que $\cosh\psi = \frac{x}{s}$ $\sinh\psi = \frac{t}{s}$

Ahora hacemos el boost

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sinh\psi \\ \cosh\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}$$

Efectivamente los eventos son simultaneos en el nuevo referencial.

3 a) $\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta}\, d\lambda = \frac{d\tau}{d\lambda} d\lambda = d\tau$ para cualquier parametro λ

Entonces, sin cambiar la accion podemos poner $\lambda = t = z^0$. El Lagrangiano es entonces

$$\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{dt}\frac{dz^\beta}{dt}} = \sqrt{1-v^2} = 1 - \frac{v^2}{2} + O(v^4)$$

$$\Rightarrow \quad I = -m\int d\tau \approx -m\int\left(1-\frac{v^2}{2}\right)dt = -m\Delta t + \int m\frac{v^2}{2}\,dt$$

con $\Delta t = t_{final} - t_{inicial}$

b) $I = \frac{1}{2}\int \eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta\varphi - \frac{m^2}{\varphi}\,d\lambda$

Exigiendo estacionaridad con respecto a variaciones en φ da

$$\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta + \frac{m^2}{\varphi^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varphi}{m} = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta}^{\,-1}$$

Sustituyendo en la accion da

$$I = \frac{1}{2}\int\left[m\frac{\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta}} - m\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta}\right]d\lambda$$

$$= -m\int\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta}\,d\lambda = -m\int d\tau$$

c) Estacionaridad con respecto a $\varphi \Rightarrow \eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta = 0$. Estacionaridad con respecto a la linea mundo implica

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\left[\eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta\varphi\right]$$

d) $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{\varphi}$, $\varphi = \frac{d\lambda}{d\theta}$

1. El momento canónico es $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta\varphi = \eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\beta}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\theta} = \eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\beta}{d\theta}$.

2. Cuando $m \neq 0$ $\frac{m}{\varphi} = \frac{d\tau}{d\lambda} \Rightarrow m\,d\theta = d\tau \Rightarrow p_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\, m\frac{dz^\beta}{d\tau}$

3. $0 = \frac{d}{d\lambda}p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} = \frac{d}{d\lambda}p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial\varphi}\partial_\alpha\varphi = \frac{d}{d\lambda}p_\alpha$ porque $\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$ en sol's

4. $p^{\alpha} p_{\alpha} + m^2 = \varphi^2 \eta_{\alpha\beta} \dot{z}^{\alpha} \dot{z}^{\beta} + m^2 = 2\varphi^2 \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

e) Si $\lambda = z^0$ entonces $\varphi = \frac{dz^0}{d\theta} = \eta^{0\alpha} p_{\alpha}$ por d) 1. es decir φ es la energía.

Ya vimos en d) 3. que $\frac{dz^0}{d\theta}$ es conservado. Así φ es constante.