Interacción con campo EM

MTW (Misner, Thorne, y Wheeler) 3.1

$$I = -m\int d\tau + q\int A_\alpha dz^\alpha$$

$$= -m\int_0^1 \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\lambda}\frac{dz^\beta}{d\lambda}}\, d\lambda + q\int_0^1 A_\alpha \frac{dz^\alpha}{d\lambda}d\lambda$$

con $A_\mu = [-\phi, A_i]$

- El término de interacción con A_μ modifica el momento canónico

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot z^\alpha} = m\frac{\eta_{\alpha\beta}\dot z^\beta}{\sqrt{-\eta_{\gamma\delta}\dot z^\gamma \dot z^\delta}} + qA_\alpha \qquad \left(\dot x = \frac{dx}{d\lambda}\right)$$

$$= m\,\eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\beta}{d\tau} + qA_\alpha$$

Sea $\pi^\alpha = m\dfrac{dz^\alpha}{d\tau} = mu^\alpha$ = "momento mecánico"

- La ecuación de Euler-Lagrange – la ec^n de movimiento – es

$$0 = \dot p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial z^\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\dot\pi^\beta + q\left(\frac{dA_\alpha}{d\lambda} - \frac{\partial A_\beta}{\partial z^\alpha}\dot z^\beta\right)$$

$$= \eta_{\alpha\beta}\dot\pi^\beta + q(\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta)\dot z^\beta$$

$$\Rightarrow \dot\pi_\alpha = qF_{\alpha\beta}\dot z^\beta \qquad \text{con } F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}\pi_\alpha = qF_{\alpha\beta}u^\beta$$

¿Qué es F?

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk}\epsilon^{klm}\partial_l A_m = \epsilon_{ijk}B^k \longleftarrow \text{Campo magnético } \bar B = \nabla\times\bar A$$

$$F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_i\phi - \partial_0 A_i = E_i \quad \text{— campo eléctrico}$$

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E_2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E_3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando la ecuacion por $\frac{d\tau}{dz^0} = \frac{1}{\gamma}$ obtenemos una expresion para la 3-fuerza

$\frac{d\pi^i}{dt}$ con $t = z^0$ el tiempo de coordenados:

$$\frac{d\pi^i}{dt} = \frac{d\pi_i}{dt} = q F_{ij} \frac{dz^j}{dt} + q F_{i0} = q\left([\vec{v} \times \vec{B}]_i + E_i\right)$$

$$v^i = \frac{dz^i}{dt}$$

$$\pi_i = \eta_{ij}\pi^j = \delta_{ij}\pi^j$$

Esto es exactamente la ley de fuerza de Lorentz! Pero nota que la fuerza $\frac{d\pi^i}{dt}$ no esta relacionado con la aceleracion exactamente por la segunda ley de Newton

$$\pi^i = m\frac{dz^i}{d\tau} = m\frac{dz^0}{d\tau}\frac{dz^i}{dz^0} = m\gamma v^i \quad , \text{ y no } mv^i$$

$$\Rightarrow F^i = \frac{d\pi^i}{dt} = m\frac{d}{dt}[\gamma v^i] = m\gamma^3\left[(1-v^2)\delta^i{}_j + v^i v_j\right]\dot{v}^j$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m(\gamma\,\vec{a}_\perp + \gamma^3\,\vec{a}_\parallel) \quad \text{con } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ y } \vec{a}_\perp \text{ componente } \perp \text{ a } \vec{v}$$

$$\vec{a}_\parallel \quad \text{"} \quad \parallel \text{ a } \vec{v}$$

- Esto reduce a $\vec{F} = m\vec{a}$ cuando $v \ll 1$ — $v \ll c$ en unidades convencionales
- Así en este caso la equacion de movimiento de una particula cargada es igual que le que se obtiene de la fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton

Y ¿que dice la cuarta ecuación?

$$\frac{d\pi^0}{dt} = -\frac{d\pi_0}{dt} = -q F_{0i} v^i = q E_i v^i = \frac{d\vec{\pi}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

" la tasa de aumento de energía mecánica π^0 es la tasa con que la fuerza $\frac{d\vec{\pi}}{dt}$ hace trabajo "

- esto es una identidad general, y no una nueva ecuacion de movimiento:

$$u^\alpha u_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{d\tau}\frac{dz^\beta}{d\tau} = -\left(\frac{d\tau}{d\tau}\right)^2 = -1$$

$$\Rightarrow \dot{u}^\alpha u_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha u^\beta = \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\left[\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\right] = \frac{1}{2}\dot{(-1)} = 0$$

" la 4-aceleración $\dot{u}^\alpha$ es perpendicular a la 4-velocidad u^α "

$$\Rightarrow 0 = m\dot{u}^\alpha u_\alpha = \dot{\pi}^\alpha u_\alpha = -\dot{\pi}^0\gamma + \dot{\pi}^i\gamma v_i$$

$$\Rightarrow \dot{\pi}^0 = \dot{\pi}^i v_i = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Las ecuaciones de campo EM, las ec^ns de Maxwell, tambien se dejan derivar de una acción sencilla : MTW 3.4

$$I = \int_M \mathcal{L}\, d^4 z \quad + \int_M j^\alpha A_\alpha \, d^4 z$$ M : region del espacio tiempo

con $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \longleftarrow = \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$

- j^α es la corriente electrica.
- Si lo que es acoplado al campo EM es una particula cargada entonces

$$j^\alpha(z) = q\, \delta^3(z^i - z^i_p(z^0)) \frac{dz^\alpha_p}{dz^0}$$ con z^α_p las coordenadas de la particula y $z^0_p(z^0) = z^0$.

$$\Rightarrow \int j^\alpha A_\alpha \, d^3 z \, dz^0 = q \int A_\alpha(z^0, z^i_p) \frac{dz^\alpha_p}{dz^0} dz^0 = q \int_C A_\alpha(z_p)\, dz^\alpha_p$$

linea mundo

Tambien se puede expresar la corriente de manera que no se refiere a una particular division de espacio tiempo en espacio y tiempo:

$$j^\alpha(z) = q \int_C \delta^4(z - z_p)\, dz^\alpha_p = q \int_C \delta^3(z^i - z^i_p(z^0_p))\, \delta(z^0 - z^0_p) \frac{dz^\alpha_p}{dz^0_p} dz^0_p$$

$$= q\, \delta^3(z^i - z_p{}^i(z^0)) \frac{dz^\alpha_p}{dz^0_p}\Big|_{z^0_p = z^0}$$

Volvemos a las ecuaciones de campo

$$\delta I = \int_M -\frac{1}{2} \delta F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + j^\alpha \delta A_\alpha \, d^4 z$$

$$= \int_M -(\partial_\alpha \delta A_\beta) F^{\alpha\beta} + j^\alpha \delta A_\alpha \, d^4 z$$

$$= \int_M -\partial_\alpha [\delta A_\beta F^{\alpha\beta}] + \delta A_\beta (\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + j^\beta)\, d^4 z$$

El primer termino es el integral de una divergencia que da el flujo de $\delta A_\beta F^{\alpha\beta}$ por ∂M, que es cero si consideramos variaciones tal que $\delta A_\alpha = 0$ en ∂M

Estacionaricidad bajo tales variaciones requiere

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -j^\beta$$

Las ecuaciones de campo para E y B, es decir F, incluyen tambien una identidad que es equivalente a decir que $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$:

$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 2\, \partial_{[\alpha} \partial_{[\beta} A_{\gamma]]} = 2\, \partial_{[\alpha} \partial_\beta A_{\gamma]} = 2\, \partial_{[[\alpha} \partial_{\beta]} A_{\gamma]} = 0$$

Aqui usamos dos veces la identidad que para cualquier tensor

$$T_{[\alpha[\beta\gamma]]} = \tfrac{1}{2} T_{[\alpha\beta\gamma]} - \tfrac{1}{2} T_{[\alpha\gamma\beta]} = \tfrac{1}{2} T_{[\alpha\beta\gamma]} + \tfrac{1}{2} T_{[\alpha\beta\gamma]}$$
$$= T_{[\alpha\beta\gamma]}$$

En general $\quad T_{[\alpha_1 \dots \alpha_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{signo}(\sigma)\, T_{\alpha_{\sigma(1)} \dots \alpha_{\sigma(n)}}$

$$\Rightarrow \quad T_{[\alpha_{\tau(1)} \dots \alpha_{\tau(n)}]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{signo}(\sigma)\, T_{\alpha_{\tau\circ\sigma(1)} \dots \alpha_{\tau\circ\sigma(n)}}$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in S_n} \text{signo}(\tau)\, \text{signo}(\sigma')\, T_{\alpha_{\sigma'(1)} \dots \alpha_{\sigma'(n)}}$$
$$= \text{signo}(\tau)\, T_{[\alpha_1 \dots \alpha_n]}$$

($\Rightarrow$ $T_{[\alpha_1 \dots \alpha_n]}$ es antisimetrico bajo cualquier intercambio de indices)

$$\Rightarrow \quad T_{[[\alpha_1 \dots \alpha_m] \dots \alpha_n]} = \frac{1}{m!} \sum_{\tau \in \sigma_m} \text{signo}(\tau)\, T_{[\alpha_{\tau(1)} \dots \alpha_{\tau(m)} \alpha_{m+1} \dots \alpha_n]}$$
$$= \left(\frac{1}{m!} \sum_{\tau \in \sigma_m} \text{signo}(\tau)^2 \right) T_{[\alpha_1 \dots \alpha_n]}$$
$$= T_{[\alpha_1 \dots \alpha_n]}$$

¿Que significan estas ecuaciones?

$\underline{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -j^\beta}$: $\quad$ 1. $\partial_i F_{i0} = -j_0 \iff \nabla \cdot \vec{E} = -j_0 = +j^0$

En el caso de una sola particula $j^0 = q\, \delta^3(z^i - z_p^i(z^0))$. Esto es la densidad de carga ρ, Lo mismo pasa si hay muchas cargas puntuales. Entonces

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \qquad \text{Gauss eléctrico}$$

2. $\partial_i F_{ij} - \partial_0 F_{0j} = -j_j \iff \partial_i \epsilon_{ijk} B^k + \partial_0 E_j = -j_j$

$$\iff \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \qquad \text{Ampère} \quad \longleftarrow \quad \vec{j} = \sum_{\text{particulas}} q\, \delta^3(z - z_p)\, \vec{v}_p$$
$$= \text{densidad de corriente}$$

$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$

1. $$0 = \partial_{[i} F_{jk]} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{lmn} \partial_l \epsilon_{mnp} B^p$$

$$= \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} \nabla \cdot \bar{B}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \bar{B} = 0 \qquad \text{Gauss magnetico}$$

2. $$0 = \partial_{[0} F_{ij]} = \frac{1}{3} (\partial_0 F_{ij} + \partial_i F_{j0} + \partial_j F_{0i})$$

$$= \frac{1}{3} (\partial_0 \epsilon_{ijk} B^k + \epsilon_{ijk} \epsilon^{klm} \partial_l E_m)$$

$$= \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} \left[\frac{\partial B^k}{\partial t} + (\nabla \times \bar{E})^k \right]$$

$$\Rightarrow \nabla \times \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Unidades. Dado que tenemos $c = 1$, $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0}$. Hemos ademas usado unidades de carga tal que ϵ_0. Nuestro ley de Coulomb es $\bar{E}(\bar{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$

Para restaurar ϵ_0 tendriamos que usar la accion $-\frac{1}{4\epsilon_0} \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \, d^4 z$ para el campo EM.

Invarianza bajo transformaciones Lorentz

Desarollamos a las transformaciones Lorentz como candidatos para invarianzas de las leyes de física. Usamos muy pocas de las leyes, o aspectos de las leyes, para determinar las transformaciones de coordenadas que pueden ser simetrias, y descartar todos los demas. Las leyes completas de EM ¿son efectivamente invariantes bajo transf. Lorentz?

Las leyes son $$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = q\, \eta^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} u^\gamma$$

$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = - j^\beta$$

$$j^\beta = q \int_C \delta^4 (z - z_p)\, dz_p^\alpha$$

en coordenadas Lorentzianas

- Estas ecuaciones son todas invariantes porque son igualdades de tensores, y si dos tensores tienen componentes iguales en un referencia sus componentes son iguales en toda referencia.

- Veremos como esto funciona explicitamente:

Consideramos una transformacion de Lorentz $z \to y$ $y^\theta = L^\theta{}_\alpha z^\alpha$

$$m \frac{du^\theta}{d\tau} = L^\theta{}_\alpha \, m \frac{du^\alpha}{d\tau}$$

$$y \quad q \eta^{\theta\xi} F_{\xi\psi} u^\psi = L^\theta{}_\alpha \, q \eta^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} u^\gamma$$

$$\Rightarrow \quad m \frac{du^\theta}{d\tau} - q \eta^{\theta\xi} F_{\xi\psi} u^\psi = L^\theta{}_\alpha \left(m \frac{du^\alpha}{d\tau} - q \eta^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} u^\gamma \right)$$

$\Rightarrow$ La ecuacion vale en referencia y si vale en referencia z

Aqui usamos el hecho que η, F, y u son tensores y por tanto bajo la transformacion Lorentz $z \to y$ transforman con un factor $\frac{\partial y^\theta}{\partial z^\alpha} = L^\theta{}_\alpha$ para cada indice arriba, y un factor $\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\theta} = L^{-1\,\alpha}{}_\theta$ para cada indice abajo. Indices que son contraidos no contribuyen porque

$$a^\theta b_\theta = \frac{\partial y^\theta}{\partial z^\alpha} a^\alpha \frac{\partial z^\beta}{\partial y^\theta} b_\beta = a^\alpha \delta^\beta_\alpha b_\beta = a^\alpha b_\alpha$$

Por eso la combinacion $\eta^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} u^\gamma$ transformaba como un vector, ya que tiene un solo indice que no es contraido, el indice vectorial (arriba) α.

¿Porque son tensores?

1. $$u^\theta = \frac{dy^\theta}{d\tau} = \frac{\partial y^\theta}{\partial z^\alpha} \frac{dz^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial y^\theta}{\partial z^\alpha} u^\alpha = L^\theta{}_\alpha u^\alpha \Rightarrow \frac{du^\theta}{d\tau} = L^\theta{}_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau}$$

2. $\eta^{\theta\xi} = L^\theta{}_\alpha L^\xi{}_\beta \eta^{\alpha\beta}$ por la definicion de transformaciones de Lorentz

(Lo que define a los L es que $\eta^{\theta\xi}$ es la misma matriz de componentes como $\eta^{\alpha\beta}$. La metrica (inversa) es un tensor pero bajo trans. Lor. sus componentes son inv.)

3. $F_{\xi\psi} = 2\,\partial_{[\xi} A_{\psi]} = ?$ Para que $F_{\xi\psi}$ sean componentes de un tensor $\left[{0 \atop 2}\right]$ tenemos que <u>postular</u> que <u>A es un covector</u>. Entonces

$$F_{\xi\psi} = 2 \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^{[\xi}} \partial_\alpha \left[\frac{\partial z^\beta}{\partial y^{\psi]}} A_\beta \right] = L^{-1\,\alpha}{}_\xi L^{-1\,\beta}{}_\psi \, 2\,\partial_{[\alpha} A_{\beta]} = L^{-1\,\alpha}{}_\xi L^{-1\,\beta}{}_\psi F_{\alpha\beta}$$

Entonces $m\frac{du^\alpha}{d\tau} - q\,\eta^{\alpha\rho} F_{\rho\gamma} u^\gamma = 0$ es inversiante porque hemos postulado que A es un covector.

- Tambien hemos usado que $\frac{\partial y^\theta}{\partial z^\alpha} = L^\theta{}_\alpha$ para una transformación de Lorentz es constante en espacio tiempo. Así $\frac{d L^\theta{}_\alpha}{d\tau} = 0$ y $\partial_\rho L^\theta{}_\alpha = 0$

· Las ecuaciones son invariantes en un sentido ampliado bajo transformaciones de coordenadas arbitrarios. si usamos la derivado covariante definido por los referenciales inerciales para y la metrica para escribir las ecuaciónes.

$$m\, D_u u^\mu = q\, g^{\mu\nu} F_{\nu\sigma} u^\sigma$$

$$D_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = 0$$

$$D_\mu\, g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} F_{\sigma\rho} = -j^\nu$$

$$j^\mu = q \int_C \frac{\delta^4(z - z_p)}{\sqrt{-g}}\, dz_p^\mu \qquad g = \det[g_{\mu\nu}]$$

En coordenadas Lorentzianas estas ecuaciones reducen a los que ya teniamos. Ademas mantienen la forma escrita en cualquier coordenadas. Pero no son invariantes en el mismo sentido bajo cambios de estas coordenadas como lo son bajo transformaciones Lorentz. Bajo estos ultimos solo las variables que describen la materia, u, F etc varian y las ecuaciones que las determinan quedan exactamente iguales. Bajo transformaciones de coordenados generales cambian tambien los componentes $g_{\mu\nu}$ y los coeficientes $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$. En ausencia de gravedad estos no son campos físicos pero mas bien parte de las ecuaciones. Por lo tanto las ecuaciones no son exactamente iguales en distintas coordenadas.

En relatividad general g y Γ son campos físicos que describen el campo gravitatorio entonces se puede considerar en marco de esta teoria que las ecuaciónes son exactamente iguales en cualquier coordenadas, y son solo los campos gobernado por estas ecuaciones que cambien. Esto es el principio de relatividad general que tanto gusto a Einstein.