

Práctico 6. Aplicaciones.

1. Tenemos una población de plantas con una distribución variada de los genotipos AA , Aa y aa . Decidimos empezar a cruzar esta población con plantas que solo sean de genotipo Aa . Sea $Y_k = (p_k, q_k, r_k)$ el vector de distribución de genotipos correspondiente a la k -ésima generación.
 - a) Hallar una matriz M tal que $Y_k = MY_{k-1}$, para todo $k \geq 1$.
 - b) Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $M = PDP^{-1}$.
 - c) Hallar D^k y M^k , para k genérico.
 - d) Deducir qué sucede a largo plazo.
 - e) Comparar con el resultado obtenido al cruzar con plantas de genotipo AA .
2. Se considera una población dividida en dos clases de edad, cuya matriz de Leslie es $L = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ y su vector de distribución inicial de edades es $X_0 = (100, 0)$
 - a) Calcular X_1 , X_2 , X_3 y X_4 , redondeando si es necesario.
 - b) Hallar su valor propio dominante λ_1 y un vector propio asociado a λ_1 .
 - c) Calcular X_5 usando las fórmulas: $X_5 = LX_4$ y $X_5 \simeq \lambda_1 X_4$.
 - d) Estudiar el comportamiento límite de esta población y su distribución por edades.
3. Se considera una población dividida en tres clases de diez años cada una, cuya matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Si originalmente hay 120 hembras en la primera clase, 80 en la segunda y 40 en la tercera, hallar cuántas habrá en total al cabo de 20 años.
 - b) Sea $v = (1, 1, 1/2)$. Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifique $Lv = \alpha v$.
 - c) Indicar si la población tiende a crecer, decrecer o estabilizarse.
 - d) ¿A qué distribución de edades (en porcentajes) tiende la población?
4. Se considera una población dividida en dos clases de edad de un año cada una, de la cual se sabe:
 - cada hembra de menos de un año tiene una descendiente;
 - cada hembra de entre uno y dos años tiene seis descendientes;
 - de las hembras de menos de un año sobrevive una de cada tres.

Se pide:

- a) Hallar su matriz de Leslie L .
- b) Hallar los valores propios $\lambda_1 > \lambda_2$ de L .
- c) Hallar vectores propios v_1 y v_2 de L asociados a λ_1 y λ_2 , respectivamente.

- d) Supongamos que inicialmente hay treinta hembras de menos de un año y diez de entre uno y dos años. Hallar explícitamente $c \in \mathbb{R}$ tal que $X_k \approx c\lambda_1^k v_1$ para valores grandes de k (X_k es el vector de distribución de edades).
- e) Con la suposición anterior sobre la población inicial, dar una estimación de la cantidad de hembras de menos de un año que habrá al transcurrir diez años.

5. Consideremos una población dividida en tres clases de diez años cada una, cuya matriz de Leslie es

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Si inicialmente tenemos 16 hembras de entre 0 y 10 años, 18 de entre 10 y 20 años y 8 de entre 20 y 30 años. ¿Cuántas habrá en cada clase al cabo de 10 años?
- b) Decidir si la población tiende a crecer, decrecer o estabilizarse al transcurrir el tiempo.
- c) Si a largo plazo hay 200 en la primera clase, ¿cuántas habrá en las otras clases?

6. Consideremos una población dividida en cuatro clases de un año cada una, cuya matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Supongamos que sabemos que en cierto momento hay 110 hembras en la primera clase, 10 en la segunda, 10 en la tercera y 10 en la cuarta. ¿Cuántas hembras había en total el año anterior?
- b) Determinar si la población tiende a crecer, decrecer o a estabilizarse.
- c) Determinar qué porcentaje de la población va a haber en cada clase a largo plazo.
- d) Si a largo plazo hay 120 en la primera clase, ¿cuántas habrá en las otras clases?
- e) Si a largo plazo hay 50 en la tercera clase, ¿cuántas habrá en las otras clases?