

Soluciones práctico 6.

1. a) $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Es $P^{-1} = \frac{1}{4}P$.

c) $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M^k = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2^{k-1}} & 1 & 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 - \frac{1}{2^{k-1}} & 1 & 1 + \frac{1}{2^{k-1}} \end{pmatrix}$.

d) De la fórmula para M^k deducimos

$$p_k = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}} q_0 - \frac{1}{2^{k-1}} r_0 \right), \quad q_k = \frac{1}{2}, \quad r_k = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}} q_0 + \frac{1}{2^{k-1}} r_0 \right).$$

La distribución tiende a que 1/4 de las plantas sean de tipo AA, 1/2 de tipo Aa y 1/4 de tipo aa.

e)

2. a) $X_1 = (100, 50)$, $X_2 = (175, 50)$, $X_3 = (250, 88)$, $X_4 = (382, 125)$.

b) $\lambda_1 = 3/2$ y $V_1 = (3, 1)$.

c) $X_5 = LX_4 = (570, 191)$ y $X_5 \simeq \lambda_1 X_4 = (573, 188)$.

d) Como es $\lambda_1 = 3/2 > 1$, entonces la población tiende a crecer exponencialmente. Las proporciones corresponden a $V_1 = (3, 1)$: un 75 % en la primera clase y un 25 % en la segunda.

3. a) En total van a haber 60 (25 en la primera, 20 en la segunda y 15 en la tercera).

b) Es $\alpha = 1/2$.

c) El valor propio dominante es $\lambda_1 = 1/2 < 1$, luego la población tiende a extinguirse.

d) Un 40 % en la primera y en la segunda clase, y un 20 % en la tercera.

4. a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$.

c) $V_1 = (6, 1)$ y $V_2 = (-3, 1)$.

d) Usando $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, obtenemos $c = 20/3$.

e) Usando $\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = X_5 \simeq c\lambda_1^5 X_0$, obtenemos $x_5 = 6400$.

5. a) Van a haber 35 de entre 0 y 10 años, 4 de entre 10 y 20 años y 9 de entre 20 y 30 años.

b) Es $R = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, luego la población tiende a estabilizarse.

c) En la segunda clase van a haber 50 y en la tercera 25.

6. a) Habían 85 (40 en la primera clase, 30 en la segunda, 10 en la tercera y 5 en la cuarta).

b) Es $R = 1$, luego la población tiende a estabilizarse.

c) Van a haber 70,6 % en la primera clase, 17,6 % en la segunda y 5,9 % en la tercera y en la cuarta.

d) En la segunda van a haber 30 y en la tercera y en la cuarta 10.

e) Van a haber 600 en la primera, 150 en la segunda y 50 en la cuarta.