Ecuación de Einstein en vacío

- Empezamos con el estudio de la ecuación de Einstein en una region donde no hay materia, o al menos es tan poca que no es importante como fuente del campo gravitatorio.
- Así, en un principio podemos aplazar el problema de como hay que representar a la materia.
- Ademas muchas, tal vez la mayoria de los aplicaciones testeadas de relatividad general son aplicaciones de la teoría en vacío: El sistema solar es esencialmente vacio fuera del sol. Los planetas son esencialmente partículas de prueba. Ellos responden a la gravedad - siguen geodesicas con buena aproximación - pero contribuyen muy poco al campo gravitatorio. Además, el campo del Sol esta determinado a menos de un constante de integracion por la ecuación de Einstein en vacío fuera del Sol y simetría esferica. El constante de integración esta fijado comparando con la teoría de Newton. La solucion esfericamente simétrica - la metrica de Schwarzschild - produce un campo gravitatorio muy lejos que es idéntico a un campo Newtoniano con el constante de integracion C en el rol de GM. Entonces se pone $C = GM_{sol}$.
- La teoría de Newton se puede definir por la ecuación diferencial

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad \longleftarrow \rho = \text{densidad de masa}, \quad \phi = \text{potencial gravitatorio}$$

En una region de vacío esto reduce a

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \longleftarrow \phi \text{ es una funcion "harmonica"}$$

En terminos de la curvatura de la conexion inercial esto se expresa como

$$R_{00} = 0 \quad \text{donde} \quad R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} \text{ es el tensor de Ricci}$$

en coordenadas "inerciales" Newtonianas $\leftarrow$ recuerdan $\Gamma^i_{00} = -g^i$ $\quad R_{00} = -\partial_i g^i$

con $\vec{g}$ = aceleracion de gravedad en teoría de Newton

Los demas componentes de $R_{\mu\nu}$ son cero siempre en la teoría Newtoniana.

Einston tomó como su ecuación de campo en vacío.

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0}$$

· Esta ecuacion

1. Es sencilla. — en terminos de curvatura, no tanto escrito explicitamente en terminos de componentes de la metrica en una carta.

2. Parece recoger la esencia de la ecuación Newtoniana. Luego estudiaremos el limite Newtoniano.

3. Es tensorial. Como consecuencia vale en todas cartas si vale en una. Entonces satisface el principio de relatividad general: Exactamente la misma ecuación vale en cualquier carta. Solo los campos gravitatorios cambian, tal como en relatividad especial cambian los valores de los variables que describen a la materia, pero no las ecuaciones cuando se cambia de una carta Lorentziana a otra. Einstein consideró que con esto habia generalizado el principio de relatividad desde una equivalencia entre referenciales Lorentzianas a una equivalencia de todos referenciales incluidos los acelerados.

El principio de relatividad general o "covarianza general" ha sido criticado como vacío, que cualquier teoria se puede considerar general relativista. Relatividad especial se puede considerar general relativista: simplemente declaras a los campos $g^{\mu\nu}$ y $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ que aparecen cuando se usa cartas arbitrarias campos físicos en lugar de partes de las ecuaciones que cambian. Incluso, se pueden caracterizar por ecuaciones de campo tensoriales: $R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} = 0$, $D_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0$. Esto no es el fin de la discusion, pero lo dejo ahí. Ahora vamos estudiar la ecⁿ $R_{\mu\nu} = 0$.

¿Cuantas ecuaciones son $R_{\mu\nu} = 0$?

Por simetría de Riemann bajo intercambio del primer y segundo par de indices.

- $R_{\mu\nu}$ es simetrico: $R_{[\mu\nu]} = 0$

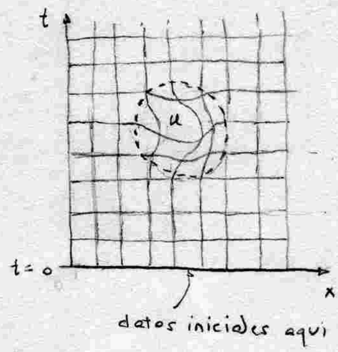
Dem: $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} = g^{\sigma\rho} R_{\sigma\nu\rho\mu} = R_{\nu\mu}$ ▨

$\Rightarrow$ Hay no mas que 10 componentes independientes de $R_{\mu\nu}$

- 10 ecuaciones independientes en $R_{\mu\nu} = 0$

- En un principio 10 ecuaciones parece justemente lo necesario, porque hay 10 componentes independientes, $g_{\mu\nu}$, de le metrica para determinar. Si hay 10 ecuaciones tipo ecuación de onda entonces los $g_{\mu\nu}$ serán determinados por sus valores iniciales y los de sus primeras derivadas iniciales.

- Pero ¡esto no puede ser asi!



- Supongamos que tenemos una solución a $R_{\mu\nu} = 0$ en una carta x^{μ}, que coincide con datos iniciales dadas en $x^0 = 0$.
- Sea x'^{μ} una nueva carta tal que $x'^{\mu} = x^{\mu}$ en todas partes salvo en un pequeño abierto U al futuro de la 3-superficie $x^0 = 0$.
- Sean $g'_{\mu\nu}$ los componentes de la metrica solución en la nueva carta x'. Los componentes de Ricci en la nueva carta son $R'_{\mu\nu} = 0$

$\Rightarrow$ $g'_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}$ pero satisface la ecuacion de campo y tiene los mismos datos iniciales!

- La invarianza de la ecuacion de campo $R_{\mu\nu} = 0$ bajo cambio de coordenadas, o "difeomorphismos", produce una indeterminacion de las soluciones que no se puede fijar con especificar datos iniciales. Eso es similar a la indeterminación $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\chi$ en las ec^s de Maxwell, y por tanto se llama indeterminación de calibre.

- La analogía con calibre en EM es muy profunda. De hecho, en el modelo Kaluza-Klein EM y relatividad general en 4 dimensiones son unificadas en relatividad general en 5 dimensiones con $A_\mu = g_{4\mu}$ $\mu = 0,1,2,3$ y $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ es consecuencia de un cambio de coordenadas. Aun sin este modelo especulativo hay muchissimos paralelismos.

- La indeterminación de las soluciones corresponde al hecho que las ecuaciones $R_{\mu\nu} = 0$ realmente no son 10 ecuaciones indepentientes. Estan relacionadas mediante 4 identidades, las identidades de Bianchi contraidas

$$D^\mu \left[R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] = 0$$

con $R = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}$ el "escalar de Ricci".

<u>Dem:</u> En practico 2 demonstraron a la identidad de Bianchi

$$D_{[\nu} R^\mu{}_{|\alpha|\beta\gamma]} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad D_\nu R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} + D_\gamma R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} + D_\beta R^\mu{}_{\alpha\gamma\nu} = 0$$ ← porque R es antisimetrico en últimos 2 indices.

Poniendo $\beta = \mu$ y sumando da

$$0 = D_\nu R_{\alpha\gamma} - D_\gamma R_{\alpha\nu} + D_\mu R^\mu{}_{\alpha\gamma\nu}$$

Ahora imponemos la condicion de metricidad $Dg = 0$ y contraemos con $g^{\alpha\gamma}$

$$0 = D_\nu R - D^\mu R_{\mu\nu} - D^\mu R_{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow \quad D^\mu \left[R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] = 0$$ ▨

- Esto es analogo a las ecⁿ de Maxwell en vacio $\Box A_\alpha - \partial_\alpha(\partial \cdot A) = 0$. Parecen 4 ecuaciones de onda para los 4 campos incognitas A_α, pero la divergencia del lado izquierdo es identicamente 0:

$$\partial^\alpha \Box A_\alpha - \partial^\alpha \partial_\alpha \partial \cdot A = \Box\, \partial \cdot A - \Box\, \partial \cdot A = 0$$

Así realmente no son 4 ecuaciones independientes, solo $4-1=3$. De ahí la indeterminacion calibre.

- Para que las soluciones de la ecuación de Einstein sean determinados de manera única por los datos iniciales hay que imponer condiciones extra, tanto como hay que fijar calibre si uno quiere calcular A_μ en EM. Estas condiciones "atan las coordenadas a la geometría", tal que no se puede hacer un cambio de coordenadas sin cambiar a los datos iniciales. Una condicion que se use mucho es

$$\Box x^\mu = 0$$ ← coordenadas armónicas. – estrechamente relacionado con el calibre de Lorenz en EM

- Volveremos a esto. Pero ahora estudiaremos a la solución estática y esfericamente simétrica de la ecuación de Einstein en vacío $R_{\mu\nu} = 0$. Se llama la

Solución de Schwarzschild — Hartle ejemplo 21.4, Wald 6.1, Carrol 7

- Solucion exacta que describe el campo en el vacío fuera del Sol o otro cuerpo esferico.
- Descubierto por Karl Schwarzschild, un conocido astrónomo y amigo de Einstein, dos meses despues publicada la ecuación de Einstein.
- Primer paso para obtener la solucion es escribir la mas general métrica que es estatica y esfericamente simétrica. En coordenadas adecuadas t, r, θ, ϕ es

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}\, dt^2 + e^{\lambda(r)}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2)$$

- ν y λ son funciones que serán determinados por la ecuacion $R_{\mu\nu} = 0$.

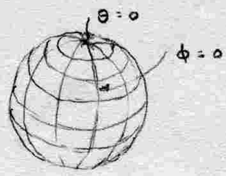
¿Porque esta forma?

Espacio de Minkowski con coordenadas esfericos en el espacio: coordenadas Lorentzianas z^α relacionadas con t, r, θ, ϕ por

$$z^0 = t \qquad \underset{x}{z^1} = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad \underset{y}{z^2} = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad \underset{z}{z^3} = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + (dr \operatorname{sen}\theta\cos\phi + d\theta\, r\cos\theta\cos\phi - d\phi\, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)^2 \\ &\quad + (dr\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + d\theta\, r\cos\theta\operatorname{sen}\phi + d\phi\, r\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^2 + (dr\cos\theta - d\theta\, r\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2) \end{aligned}$$

$d\Omega^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2$ es el elemento de linea sobre la esfera de radio 1 en terminos de los ángulos de coordenadas esféricos.



- Se espera que lejos de la masa esférica, p. ej. el sol, la métrica se acerca a la de Minkowski ← que la métrica sea asintoticamente plana
  - esto se realiza si $\upsilon, \lambda \to 0$ con $r \to \infty$

- El ansatz $ds^2 = -e^{\upsilon(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{\upsilon} & & & \\ & e^{\lambda} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2\operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

- es independiente del tiempo t: $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$. ← es "estacionario"

- es invariante bajo la reversion del tiempo $t \to -t$ $(r,\theta,\phi) \to (r,\theta,\phi)$
  - bajo esta transformacion $g_{tt} \to g_{tt}$ $g_{ij} \to g_{ij}$, pero $g_{ti} \to -g_{ti}$

  En el ansatz $g_{ti} = 0$, así $g_{\mu\nu}$ es invariante.

- Estacionariedad + invarianza bajo reversión del tiempo = "estático" ← def^n

- En Minkowski una rotación espacial $x^0 \to x^0$, $x^i \to R^i{}_j x^j$ $R \in SO(3)$ ← $R^T R = \mathbb{1}$ $\det R = 1$

  implica $t \to t' = t$ $\theta \to \theta'(\theta,\phi)$
  $r \to r' = r$ $\phi \to \phi'(\theta,\phi)$

  P. ej. si es una rotación entorno al eje $x = x^3$ $\theta' = \theta$, $\phi' = \phi + \Delta$

  - Para una rotación general θ', ϕ' son funciones mas complicadas de θ, ϕ, pero siempre las esferas t, r constante giran rigidamente, preservando distancias.

    Así $d\Omega^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2 = d\theta'^2 + \operatorname{sen}^2\theta'\, d\phi'^2$ para cualquier pequeño desplazamiento tangencial a la esfera.

- Ahora supongamos que aplicamos la misma transformacion de coordenadas $t \to t$ $\theta \to \theta'(\theta,\phi)$, $r \to r$ $\phi \to \phi'(\theta,\phi)$ correspondiente a una rotación espacial en Minkowski a nuestra métrica ansatz. $ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$.

¡No cambiaría!
  - Los primeros dos terminos no cambian porque t, r no estan afectadas por la transformacion
  - El último termino es incambiado porque $d\Omega^2$ lo es.

- Entonces si hay una solución de la forma del ansatz entonces esto sería <u>una</u> solución estática y esfericamente simétrica en el sentido que es invariante bajo un grupo de transformaciones de coordenadas que es isomorfa a las rotaciones $SO(3)$.

- Tambien resulta ser la única solución en vacío que es estática y esfericamente simétrica. De hecho es la única solucion que es esfericamente simétrica. Estático viene de yapa. Esto es el contenido del teorema Jebsen - Birkhoff

  - "Simetría esferica" significa que la metrica tiene un grupo de isometrías que incluye a $SO(3)$ y que las orbitas de este $SO(3)$ son 2-esferas espaciales.

  - <u>isometría</u> = cambio de coordenadas tal que los nuevos componentes $g'_{\mu\nu}(x')$ de la metrica estan dadas por las mismas funciones de las nuevas coordenadas x' como los viejos componentes $g_{\mu\nu}(x)$ como funciones de las viejas coordenadas x.

  → "la metrica se ve exactamente igual."

  - <u>orbita</u> de un punto en el espacio tiempo = Si $P = P(x^\mu = a^\mu)$ entonces la isometría define $P' = P(x'^\mu = a^\mu)$ – "el punto con los mismos valores de las coordenadas"

    Un grupo de isometrias mapea un punto P dado a un conjunto de puntos de esta manera – su orbita.

  - Claramente las rotaciones espaciales de Minkowski son isometrías, y sus orbitas son las 2-esferas entorno al origen, que forman una foliación del espacio tiempo.

¿Como se obtiene la metrica del ensatz a partir de simetría esférica? (8)

Hay un teorema que dice que entonces la metrica debe ser de la forma

$$ds^2 = g_{IJ}(v)\, dv^I dv^J + f(v)\, \gamma_{AB}(u)\, du^A du^B$$

en coordenadas adecuadas v^0, v^1, u^2, u^3. u^A son coordenadas sobre una orbita mientras v^I son constantes sobre las orbitas, y sirven para identificar las orbitas.

- la metrica restringida a una orbita, $f\, \gamma_{AB}(u)\, du^A du^B$ debe ser invariante bajo rotaciones, que actúan transitivamente sobre la orbita.

 -"transitivo" = te lleva de cualquier punto a cualquier otro punto

Esto restringe γ muchissimo - debe ser un "espacio homogeneo"

- en particular el escalar de Ricci debe ser constante
- si elegimos un polo norte de la 2-esfera, y una base ON allí podemos definir coordenadas normales de Riemann z^A sobre la esfera. Poniendo $z^1 = \theta \cos\phi$, $z^2 = \theta \operatorname{sen}\phi$ obtenemos coordenadas esfericas, y dado que R es uniforme se puede mostrar que

$$\gamma_{AB}(u)\, du^A du^B = d\Omega^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2$$

- Ahora definimos la coordenada radial de Schwarzschild r por

 Area orbita $= 4\pi r^2$

- γ asigna area 4π a la orbita. $\Rightarrow f(v) = r^2$

- Usamos r como uno de nuestras coordenadas v^I. Aqui tenemos que hacer la hipotesis que $dr \neq 0$ porque donde $dr = 0$ r no sirve de coordenada. (No se puede expresar cualquier funcion suave como una funcion suave de r y otra coordenada v^0.)
  - de hecho $dr = 0$ en el horizonte en Schwarzschild, pero en otras partes del espacio tiempo $dr \neq 0$. Creo que no hay soluciones en vacío con $dr = 0$ en un abierto. Si los hay habría que elevar $dr \neq 0$ a una hipotesis que selecciona solⁿ de Schwarzschild, junto con simetría esferica.

Se puede seguir así, eligiendo un t especial hasta que llegamos a una metrica de la forma de nuestro ansatz $ds^2 = -e^{\sigma}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2$, pero con σ y λ ahora funciones de r y t. Resolviendo la ecuación $R_{\mu\nu}=0$ obtenemos como única solución la solución de Schwarzschild.

No voy a presentar todo esto. Solo quise darles una idea como funciona. Esta bien explicado en Wald y en Carrol. Ahora nos volcamos a resolver $R_{\mu\nu}=0$ para metricas de la forma de nuestro ansatz y vamos a poner $\partial_t g_{\mu\nu}=0$ como hipotesis en lugar de consecuencia de $R_{\mu\nu}=0$ para simplificar

<u>Resolviendo $R_{\mu\nu}=0$</u>

- Sabemos que los puntos estacionarios de la acción $I = \frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\,d\lambda$ son geodesicas con λ como parametro afín. Entonces las ecuaciones Euler-Lagrange deben ser equivalentes a las ecuaciones de geodesicas $0 = \frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$

  Se puede entonces despejar $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ de la ecuacion E-L para $\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2}$.

- Obtenemos $\Gamma^{t}_{tr} = \Gamma^{t}_{rt} = \frac{\sigma'}{2}$ —— $'$ denota $\frac{\partial}{\partial r}$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi r} = \Gamma^{\phi}_{r\phi} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{\lambda'}{2} \qquad \Gamma^{r}_{tt} = \frac{\sigma'}{2}e^{\sigma-\lambda} \qquad \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -re^{-\lambda} \qquad \Gamma^{r}_{\phi\phi} = -r\,\mathrm{sen}^2\theta\, e^{-\lambda}$$

- De esto sale

$$R^{t}{}_{rtr} = \frac{1}{4}(\sigma'\lambda' - \sigma'' - \sigma'^2)$$

$$R^{t}{}_{\theta t\theta} = -\frac{1}{2}re^{-\lambda}\sigma'$$

$$R^{t}{}_{\phi t\phi} = \mathrm{sen}^2\theta\, R^{t}{}_{\theta t\theta}$$

$$R^{r}{}_{\theta r\theta} = \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda'$$

$$R^{r}{}_{\phi r\phi} = \mathrm{sen}^2\theta\, R^{r}{}_{\phi r\phi}$$

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = (1-e^{-\lambda})\,\mathrm{sen}^2\theta$$

- solo estos componentes y los relacionados por simetría son no cero. $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ visto como matriz 6×6 es diagonal.

Formando el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}$ obtenemos

$$R_{tt} = e^{\nu-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right)$$

$$R_{rr} = -\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-\lambda}\left(\frac{r}{2}(\lambda' - \nu') - 1\right) + 1$$

$$R_{\phi\phi} = \operatorname{sen}^2\theta \, R_{\theta\theta}$$

← Los demas componentes son cero identicamente para la metrica ansatz. $R_{\mu\nu}$ es diagonal.

Para metricas estáticas y esfericamente simetricas las ecuaciones de Einstein en vacío, $R_{\mu\nu} = 0$, reducen a 3 ecuaciones diferenciales ordinarias en r para λ y ν. (Claramente $R_{\phi\phi} = 0$ es redundante con $R_{\theta\theta} = 0$.)

¡Resolvemos estas ecuaciones!

1. $$0 = R_{rr} + e^{-(\nu-\lambda)} R_{tt} = \frac{\nu' + \lambda'}{r} \iff \nu + \lambda = K = \text{constante}, \text{ para } r > 0$$

Reescalando t se pones K en 0:

Sea $\tilde{\nu} = \nu - K$, $\tilde{t} = e^{\frac{K}{2}} t$. $\tilde{\nu} + \lambda = 0$. Entonces

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$
$$= -e^{\tilde{\nu}} d\tilde{t}^2 + \frac{1}{e^{\tilde{\nu}}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Adoptamos $\tilde{\nu}$ como nuestro nuevo ν, y $\tilde{t}$ como nuestro nuevo t, entonces

$$ds^2 = -e^{\nu} dt^2 + \frac{1}{e^{\nu}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Ahora queda solo encontrar una función de r, ν.

2. $$0 = R_{\theta\theta} = e^{-\lambda}\left(\frac{r}{2}(\lambda' - \nu') - 1\right) + 1 = -e^{\nu}(r\nu' + 1) + 1$$

$$\iff 1 = e^{\nu}(r\nu' + 1) = (r e^{\nu})'$$

$$\iff r e^{\nu} = r - r_s$$ ← constante de integración llamado radio de Schwarzschild. (Veremos que para soluciones que normalmente se consideren $r_s \geq 0$ pero todavia no lo sabemos.)

$$\implies e^{\nu} = 1 - \frac{r_s}{r}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Hemos determinado a la metrica a menos de un constante r_s.

3, Hemos resuelto la ecuacion $R_{\theta\theta}=0$ (y por lo tanto $0=R_{\phi\phi}=\mathrm{sen}^2\theta\, R_{\theta\theta}$ tambien) y $0 = R_{rr} + e^{-(\nu-\lambda)}R_{tt}$. Nos queda una ecuación mas, que podemos tomar como

$$0 = -R_{rr} = \frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\lambda'}{r} = \frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'}{r}$$

Pero $r_s = -(1-e^{\nu})r \Rightarrow 0 = r_s'' = [(1-e^{\nu})r]'' = -[\nu' e^{\nu} r + e^{\nu} - 1]'$

$$= -e^{\nu}\left[(\nu''+\nu'^2)r + 2\nu'\right]$$

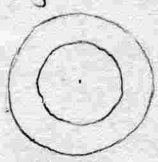
$$= -2re^{\nu}\left[\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'}{r}\right]$$

Así nuestra solucion a las primeras dos ecuaciones tambien satisface la tercera, para cualquier valor de r_s.

¿ Esperamos una solución única ?

¡No! En el problema analogo en la teoría de Newton resolvemos la ecuación de campo en vacío $\nabla^2\phi = 0$ para el potencial gravitatorio ϕ en la región fuera de un cuerpo masivo bajo la hipotesis que ϕ es esfericamente simetrico

- Usando el teorema de Gauss sobre esferas de simetria vemos que el flujo de $\bar{g} = -\nabla\phi$ a traves estos es independiente de radio (en la región de vacío)



Flujo $= 4\pi r^2 g_r = $ const. $\Rightarrow \bar{g} = g_r\hat{r} = \frac{\text{const.}}{4\pi r^2}\hat{r}$

El constante es proporcional a la masa del cuerpo central ;

$$\text{const.} = -4\pi G M$$

Así esperamos que la solución estatica y esfericamente simetrica de la ecuacion de Einstein en vacío, $R_{\mu\nu}=0$, es determinado a menos de un constante relacionado con la masa gravitacional activa del cuerpo central.

la masa que actua como fuente del campo gravitatorio.