Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra I
Segundo semestre de 2021

Repartido 6: Generalidades de Módulos

1. Sea A un anillo. Probar que "es lo mismo":
   - dar un A-módulo a izquierda que un grupo abeliano M y un morfismo de anillos $A \to \mathrm{End}(M, +, 0)$,
   - dar un A-módulo a derecha que un grupo abeliano M y un morfismo de anillos $A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}(M, +, 0)$.

   Deducir que $\mathbb{Z}$ no admite estructura de $\mathbb{Z}_n$-módulo, para ningún $n = 2, 3, \ldots$ ¿Cuántas estructuras de $\mathbb{Z}_n$-módulo admite $\mathbb{Z}_m$, $n, m = 2, 3, \ldots$?

2. (*Restricción de escalares*). Sean A y B anillos, y sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos. Si M es un B-módulo a izquierda, probar que M también es un A-módulo a izquierda, definiendo $a \cdot m = \varphi(a)m$ para todo $a \in A$, $m \in M$.

3. En cada caso, dar ejemplos de un módulo M y submódulos N, S, y T tales que
   a) $N + (S \cap T) \neq (N + S) \cap (N + T)$.
   b) $N \cap (S + T) \neq (N \cap S) + (N \cap T)$.
   c) $M = S \oplus T$ y $N \neq (N \cap S) \oplus (N \cap T)$.

4. Sea A un anillo. Consideremos A como A-módulo a izquierda con la acción regular.
   a) Probar que los morfismos de A-módulos $A \to A$ son los morfismos $x \mapsto xa$ para todo $a \in A$ fijo. Deducir que $A^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{End}_A(A)$ como anillos.
   b) Deducir que el único mapa $A \to A$ que es morfismo de anillos y de A-módulos a la vez es la identidad.
   c) Hallar ejemplos de mapas $A \to A$ que son morfismos de anillos pero no de módulos; y ejemplos de mapas $A \to A$ no nulos que son morfismos de módulos pero no de anillos.

5. Un módulo S se dice *simple* si $S \neq \{0\}$ y S no tiene submódulos propios.
   a) Probar que todo módulo simple es cíclico.
   b) Dar un ejemplo de un módulo cíclico que no sea simple. (El ejercicio 7*b*) da una condición necesaria y suficiente para que un módulo cíclico sea simple.)
   c) Sean M un módulo, y N, S submódulos de M tales que S es simple. Probar que $N \cap S = \{0\}$ o $S \subset N$.
   d) Deducir que dos submódulos simples son iguales o tienen intersección trivial.

6. Sea A un anillo. Sea M un A-módulo a izquierda, y sea $S \subset M$ un subconjunto no vacío. Se define el *anulador* de S como

   $$Ann(S) = \{a \in A \mid \forall s \in S, a \cdot s = 0\} \subset A.$$

   Si $m \in M$, notamos $Ann(m) := Ann(\{m\})$.

   a) Probar que $Ann(S)$ es un ideal izquierdo de A, y si $S \subset M$ es un submódulo, entonces $Ann(S)$ es un ideal bilateral.

b) Sea I ideal de A tal que $I \subset Ann(M)$. Probar que M es un A/I-módulo, con la acción $\overline{a} \cdot m := a \cdot m$ para todo $a \in A$, $m \in M$.

7. (*Módulos cíclicos*). Sea A un anillo.

   a) Probar que $\frac{A}{Ann(m)} \simeq Am$ como A-módulos a izquierda. Luego todo A-módulo cíclico es cociente de A por un ideal izquierdo.

   b) Deducir que Am es simple si y sólo si $Ann(m)$ es un ideal izquierdo maximal en A.

   c) Probar que todo cociente de un A-módulo cíclico es cíclico.

   d) Deducir que todo cociente de A por un ideal izquierdo es un A-módulo cíclico.[1]

8. Sea A un anillo.

   a) Sea I un ideal izquierdo maximal de A, probar que A/I es un A-módulo simple.

   b) Probar que si $M = Am$ es simple, entonces existe I ideal izquierdo maximal de A tal que $M \simeq A/I$.

9. Un módulo M se dice *indescomponible* si $M \neq \{0\}$ y M no se puede escribir como suma directa de submódulos propios. En caso contrario M se dice *descomponible*.

   a) Probar que todo módulo simple es indescomponible.

   b) Probar que $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo es indescomponible pero no es simple.

   c) Probar que si D es un DIP entonces D es indescomponible como D-módulo.

   d) Probar que si $M \neq 0$, entonces M es descomponible si y sólo si existe $\varphi \in \mathrm{End}_A(M)$ tal que $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \mathrm{id}$. Observar que una tal φ es una *retracción* de M en un submódulo propio N, es decir cumple $\varphi : M \to N$ y $\varphi(n) = n$ para todo $n \in N$; el complemento directo de N resulta $\ker \varphi$.

   e) Deducir que si $M = S \oplus T$ y $N \subset M$ es un submódulo con $S \subset N$ entonces $N = S \oplus (N \cap T)$ (esto muestra que vale la igualdad en 3*c*) cuando $S \subset N$).

10. (*Lema de Schur*). Sea A un anillo.

    a) Sean M y N dos A-módulos simples y $\varphi : M \to N$ un mapa A-lineal. Probar que $\varphi = 0$ o φ es un isomorfismo.

    b) Si M es un módulo simple, probar que $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo con división. ¿Vale el recíproco?

    c) Consideremos ahora $A = \mathbb{C}$. Probar que si M es simple, entonces $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M) \simeq \mathbb{C}$. (Sugerencia: un endomorfismo de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial siempre tiene un valor propio.)

11. Un módulo M se dice *semisimple* si $M = 0$ o M es suma directa de submódulos simples.

    a) Sea M un módulo y N, P submódulos de M tales que N es simple. Probar que $N \subset P$ o $N \cap P = 0$.

    b) Probar que si un módulo es suma de submódulos simples, entonces es semisimple.
    Sugerencia: si $M = \sum_{i \in I} M_i$, M_i simple, tomar $J \subset I$ maximal[2] entre los subconjuntos de I que verifican $\sum_{i \in J} M_i$ es directa. Probar $M_k \subset \sum_{i \in J} M_i$, para todo $k \in I$.

12. Se considera $\mathbb{Z}_m$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

[1] Juntando a) y d) obtenemos: *un A-módulo es cíclico si y sólo si es de la forma A/I para cierto I ideal izquierdo de A.*

[2] Asumir que existe un tal J, que se prueba aplicando el Lema de Zorn.

a) Probar que $\mathbb{Z}_m$ es simple si y sólo si $m = p$ primo.

b) Probar que $\mathbb{Z}_m$ es indescomponible si y sólo si $m = p^r$ con p primo, $r \geqslant 1$.

c) Probar que $\mathbb{Z}_m$ es semisimple si y sólo si $m = p_1 \cdots p_r$, siendo $p_1, \dots, p_r$ primos distintos.

13. En este ejercicio probaremos que las propiedades universales del producto directo y de la suma directa los caracterizan como módulos.

Sea A un anillo, y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de A-módulos.

a) Sea P un A-módulo, y sea $\tilde{p_i} : P \to M_i$ morfismo de A-módulos para cada $i \in I$. Supongamos que el par $(P, (\tilde{p_i})_{i \in I})$ verifica la propiedad universal del producto. Es decir, que para todo A-módulo Q y morfismos de A-módulos $f_i : Q \to M_i$, existe un único $f : Q \to P$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{p_i}"] & M_i \\ Q \arrow[u, dotted, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Probar que existe un único isomorfismo $\varphi : \prod_{i \in I} M_i \to P$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $j \in I$:

$$\begin{tikzcd} \prod_{i \in I} M_i \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_j"'] & & P \arrow[dl, "\tilde{p_j}"] \\ & M_j & \end{tikzcd}$$

b) Sea S un A-módulo, y sea $\tilde{\iota_i} : M_i \to S$ morfismo de A-módulos para cada $i \in I$. Supongamos que el par $(S, (\tilde{\iota_i})_{i \in I})$ verifica la propiedad universal de la suma directa. Es decir, que para todo A-módulo T y morfismos de A-módulos $g_i : M_i \to T$, existe un único $g : S \to T$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\tilde{\iota_i}"] \arrow[dr, "g_i"'] & S \arrow[d, dotted, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Probar que existe un único isomorfismo $\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \to S$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $j \in I$:

$$\begin{tikzcd} & M_j \arrow[dl, "\iota_j"'] \arrow[dr, "\tilde{\iota_j}"] & \\ \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[rr, "\psi"'] & & S \end{tikzcd}$$

14. Dado K un anillo con división, se considera el anillo $A = M_n(K)$. Sean $\{E_{ij} : \ i, j = 1, \dots, n\}$ y $\{e_i : \ i = 1, \dots, n\}$ las bases canónicas de A y de K^n, respectivamente.

a) Probar que K^n es un A-módulo simple (con la acción dada por el producto usual de matriz por vector).

b) Probar que para cada $j = 1, \dots, n$, el conjunto $L_j = \{\sum_{i=1}^{n} a_i\, E_{ij} : \ a_1, \dots, a_n \in K\}$ es un ideal izquierdo de A isomorfo a K^n como A-módulo y que $A = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$. Deducir que A es un A-módulo semisimple. [3]

c) Probar que existen $R_1, \dots, R_n$ ideales derechos simples (como A-módulos a derecha) tales que $A = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$.

15. Sean A un anillo conmutativo y M un A-módulo.

a) Probar que $aM := \{am : m \in M\}$ es un submódulo de M.

b) Probar que si $a \in A$ es nilpotente, entonces $M = \{0\} \iff aM = M$ (éste es un caso particular del *lema de Nakayama*).

16. Sea A un anillo, $I \subset A$ un ideal izquierdo y M un A-módulo. Para cada subconjunto no vacío S de M definimos $IS = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\, m_i : \ a_i \in I, \ m_i \in S, \ i = 1, \dots, n, \ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$.

a) Probar que para todo $S \subset M$ no vacío el conjunto IS es un A-submódulo de M.

b) Si además I es un ideal bilateral de A, probar que M/IM es un A/I-módulo definiendo $(a + I)(m + IM) = am + IM$.

[3] Hemos probado que $M_n(K)$, donde K es un anillo con división, es un anillo semisimple (en el sentido de semisimple como A-módulo sobre símismo). El *teorema de Artin-Wedderburn* afirma que todo anillo semisimple es producto directo de finitos anillos de matrices sobre anillos con división.