

Repartido 6: Generalidades de Módulos

1. Sea A un anillo. Probar que “es lo mismo”:
 - dar un A -módulo a izquierda que un grupo abeliano M y un morfismo de anillos $A \rightarrow \text{End}(M, +, 0)$,
 - dar un A -módulo a derecha que un grupo abeliano M y un morfismo de anillos $A^{\text{op}} \rightarrow \text{End}(M, +, 0)$.

Deducir que \mathbb{Z} no admite estructura de \mathbb{Z}_n -módulo, para ningún $n = 2, 3, \dots$. ¿Cuántas estructuras de \mathbb{Z}_n -módulo admite \mathbb{Z}_m , $n, m = 2, 3, \dots$?

2. (*Restricción de escalares*). Sean A y B anillos, y sea $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Si M es un B -módulo a izquierda, probar que M también es un A -módulo a izquierda, definiendo $a \cdot m = \varphi(a)m$ para todo $a \in A$, $m \in M$.
3. En cada caso, dar ejemplos de un módulo M y submódulos N , S , y T tales que
 - a) $N + (S \cap T) \neq (N + S) \cap (N + T)$.
 - b) $N \cap (S + T) \neq (N \cap S) + (N \cap T)$.
 - c) $M = S \oplus T$ y $N \neq (N \cap S) \oplus (N \cap T)$.

4. Sea A un anillo. Consideremos A como A -módulo a izquierda con la acción regular.
 - a) Probar que los morfismos de A -módulos $A \rightarrow A$ son los morfismos $x \mapsto xa$ para todo $a \in A$ fijo. Deducir que $A^{\text{op}} \simeq \text{End}_A(A)$ como anillos.
 - b) Deducir que el único mapa $A \rightarrow A$ que es morfismo de anillos y de A -módulos a la vez es la identidad.
 - c) Hallar ejemplos de mapas $A \rightarrow A$ que son morfismos de anillos pero no de módulos; y ejemplos de mapas $A \rightarrow A$ no nulos que son morfismos de módulos pero no de anillos.

5. Un módulo S se dice *simple* si $S \neq \{0\}$ y S no tiene submódulos propios.
 - a) Probar que todo módulo simple es cíclico.
 - b) Dar un ejemplo de un módulo cíclico que no sea simple. (El ejercicio 7b) da una condición necesaria y suficiente para que un módulo cíclico sea simple.)
 - c) Sean M un módulo, y N, S submódulos de M tales que S es simple. Probar que $N \cap S = \{0\}$ o $S \subset N$.
 - d) Deducir que dos submódulos simples son iguales o tienen intersección trivial.

6. Sea A un anillo. Sea M un A -módulo a izquierda, y sea $S \subset M$ un subconjunto no vacío. Se define el *anulador* de S como

$$\text{Ann}(S) = \{a \in A \mid \forall s \in S, a \cdot s = 0\} \subset A.$$

Si $m \in M$, notamos $\text{Ann}(m) := \text{Ann}(\{m\})$.

- a) Probar que $\text{Ann}(S)$ es un ideal izquierdo de A , y si $S \subset M$ es un submódulo, entonces $\text{Ann}(S)$ es un ideal bilateral.

b) Sea I ideal de A tal que $I \subset \text{Ann}(M)$. Probar que M es un A/I -módulo, con la acción $\bar{a} \cdot m := a \cdot m$ para todo $a \in A, m \in M$.

7. (Módulos cíclicos). Sea A un anillo.

a) Probar que $\frac{A}{\text{Ann}(m)} \simeq Am$ como A -módulos a izquierda. Luego todo A -módulo cíclico es cociente de A por un ideal izquierdo.

b) Deducir que Am es simple si y sólo si $\text{Ann}(m)$ es un ideal izquierdo maximal en A .

c) Probar que todo cociente de un A -módulo cíclico es cíclico.

d) Deducir que todo cociente de A por un ideal izquierdo es un A -módulo cíclico.¹

8. Sea A un anillo.

a) Sea I un ideal izquierdo maximal de A , probar que A/I es un A -módulo simple.

b) Probar que si $M = Am$ es simple, entonces existe I ideal izquierdo maximal de A tal que $M \simeq A/I$.

9. Un módulo M se dice *indescomponible* si $M \neq \{0\}$ y M no se puede escribir como suma directa de submódulos propios. En caso contrario M se dice *descomponible*.

a) Probar que todo módulo simple es indescomponible.

b) Probar que \mathbb{Z} como \mathbb{Z} -módulo es indescomponible pero no es simple.

c) Probar que si D es un DIP entonces D es indescomponible como D -módulo.

d) Probar que si $M \neq 0$, entonces M es descomponible si y sólo si existe $\varphi \in \text{End}_A(M)$ tal que $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \text{id}$. Observar que una tal φ es una *retracción* de M en un submódulo propio N , es decir cumple $\varphi : M \rightarrow N$ y $\varphi(n) = n$ para todo $n \in N$; el complemento directo de N resulta $\ker \varphi$.

e) Deducir que si $M = S \oplus T$ y $N \subset M$ es un submódulo con $S \subset N$ entonces $N = S \oplus (N \cap T)$ (esto muestra que vale la igualdad en 3c) cuando $S \subset N$).

10. (Lema de Schur). Sea A un anillo.

a) Sean M y N dos A -módulos simples y $\varphi : M \rightarrow N$ un mapa A -lineal. Probar que $\varphi = 0$ o φ es un isomorfismo.

b) Si M es un módulo simple, probar que $\text{End}_A(M)$ es un anillo con división. ¿Vale el recíproco?

c) Consideremos ahora $A = \mathbb{C}$. Probar que si M es simple, entonces $\text{End}_{\mathbb{C}}(M) \simeq \mathbb{C}$. (Sugerencia: un endomorfismo de un \mathbb{C} -espacio vectorial siempre tiene un valor propio.)

11. Un módulo M se dice *semisimple* si $M = 0$ o M es suma directa de submódulos simples.

a) Sea M un módulo y N, P submódulos de M tales que N es simple. Probar que $N \subset P$ o $N \cap P = 0$.

b) Probar que si un módulo es suma de submódulos simples, entonces es semisimple.

Sugerencia: si $M = \sum_{i \in I} M_i$, M_i simple, tomar $J \subset I$ maximal² entre los subconjuntos de I que verifican $\sum_{i \in J} M_i$ es directa. Probar $M_k \subset \sum_{i \in J} M_i$, para todo $k \in I$.

12. Se considera \mathbb{Z}_m como \mathbb{Z} -módulo.

¹Juntando a) y d) obtenemos: un A -módulo es cíclico si y sólo si es de la forma A/I para cierto I ideal izquierdo de A .

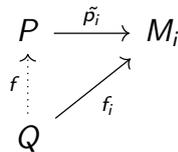
²Asumir que existe un tal J , que se prueba aplicando el Lema de Zorn.

- a) Probar que \mathbb{Z}_m es simple si y sólo si $m = p$ primo.
- b) Probar que \mathbb{Z}_m es indescomponible si y sólo si $m = p^r$ con p primo, $r \geq 1$.
- c) Probar que \mathbb{Z}_m es semisimple si y sólo si $m = p_1 \cdots p_r$, siendo p_1, \dots, p_r primos distintos.

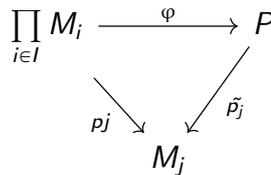
13. En este ejercicio probaremos que las propiedades universales del producto directo y de la suma directa los caracterizan como módulos.

Sea A un anillo, y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de A -módulos.

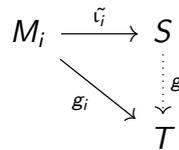
- a) Sea P un A -módulo, y sea $\tilde{p}_i : P \rightarrow M_i$ morfismo de A -módulos para cada $i \in I$. Supongamos que el par $(P, (\tilde{p}_i)_{i \in I})$ verifica la propiedad universal del producto. Es decir, que para todo A -módulo Q y morfismos de A -módulos $f_i : Q \rightarrow M_i$, existe un único $f : Q \rightarrow P$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $i \in I$:



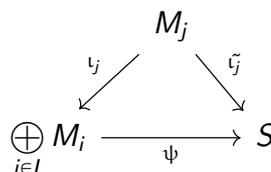
Probar que existe un único isomorfismo $\varphi : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow P$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $j \in I$:



- b) Sea S un A -módulo, y sea $\tilde{c}_i : M_i \rightarrow S$ morfismo de A -módulos para cada $i \in I$. Supongamos que el par $(S, (\tilde{c}_i)_{i \in I})$ verifica la propiedad universal de la suma directa. Es decir, que para todo A -módulo T y morfismos de A -módulos $g_i : M_i \rightarrow T$, existe un único $g : S \rightarrow T$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $i \in I$:



Probar que existe un único isomorfismo $\psi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow S$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $j \in I$:



14. Dado K un anillo con división, se considera el anillo $A = M_n(K)$. Sean $\{E_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$ y $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ las bases canónicas de A y de K^n , respectivamente.

- a) Probar que K^n es un A -módulo simple (con la acción dada por el producto usual de matriz por vector).
- b) Probar que para cada $j = 1, \dots, n$, el conjunto $L_j = \{\sum_{i=1}^n a_i E_{ij} : a_1, \dots, a_n \in K\}$ es un ideal izquierdo de A isomorfo a K^n como A -módulo y que $A = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$. Deducir que A es un A -módulo semisimple.³
- c) Probar que existen R_1, \dots, R_n ideales derechos simples (como A -módulos a derecha) tales que $A = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$.

15. Sean A un anillo conmutativo y M un A -módulo.

- a) Probar que $aM := \{am : m \in M\}$ es un submódulo de M .
- b) Probar que si $a \in A$ es nilpotente, entonces $M = \{0\} \iff aM = M$ (éste es un caso particular del *lema de Nakayama*).

16. Sea A un anillo, $I \subset A$ un ideal izquierdo y M un A -módulo. Para cada subconjunto no vacío S de M definimos $IS = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i m_i : a_i \in I, m_i \in S, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$.

- a) Probar que para todo $S \subset M$ no vacío el conjunto IS es un A -submódulo de M .
- b) Si además I es un ideal bilateral de A , probar que M/IM es un A/I -módulo definiendo $(a + I)(m + IM) = am + IM$.

³Hemos probado que $M_n(K)$, donde K es un anillo con división, es un anillo semisimple (en el sentido de semisimple como A -módulo sobre sí mismo). El *teorema de Artin-Wedderburn* afirma que todo anillo semisimple es producto directo de finitos anillos de matrices sobre anillos con división.