14 Derivadas parciales

Las gráficas de funciones de dos variables son superficies que pueden tomar una variedad de formas, incluyendo algunas que tienen una silla o paso entre montañas. En este lugar, en Utah (conocido como "The wave"), puede verse un punto que es un mínimo en una dirección, pero es un máximo en otra dirección. Superficies como éstas se discuten en la sección 14.7.

Hasta ahora, hemos estudiado el cálculo de una función de una variable. Pero en el mundo real, las cantidades físicas dependen frecuentemente de dos o más variables, por lo que en este capítulo enfocaremos nuestra atención en las funciones de varias variables y extenderemos las ideas básicas del cálculo diferencial a tales funciones.

14.1 Funciones de varias variables

En esta sección se estudian funciones de dos o más variables desde cuatro puntos de vista:

- verbalmente (mediante una descripción hecha con palabras)
- numéricamente (mediante una tabla de valores)
- algebraicamente (mediante una fórmula explícita)
- visualmente (mediante una gráfica o curvas de nivel)

Funciones de dos variables

La temperatura T en un punto de la superficie de la Tierra en cualquier momento dado, depende de la longitud x y la latitud y del punto. Se puede pensar que T es una función de dos variables x y y, o como una función del par (x, y). Esta dependencia funcional se indica escribiendo $T = f(x, y)$.

El volumen V de un cilindro circular depende de su radio r y de su altura h. De hecho, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Se dice que V es una función de r y h, y escribimos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definición Una **función f de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D, un único número real que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

A menudo, escribimos $z = f(x, y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto (x, y). Las variables x y y son **variables independientes** y z es la **variable dependiente**. [Compare lo anterior con la notación $y = f(x)$ para funciones de una variable.]

Una función de dos variables es una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una manera de representar tal función es mediante un diagrama de flechas (véase figura 1), donde el dominio D se representa como un subconjunto del plano xy y el rango es un conjunto de números sobre una recta real, que se muestra como un eje z. Por ejemplo, si $f(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y) en una placa metálica plana con la forma de D, podemos considerar al eje z como un termómetro que va mostrando el registro de temperaturas.

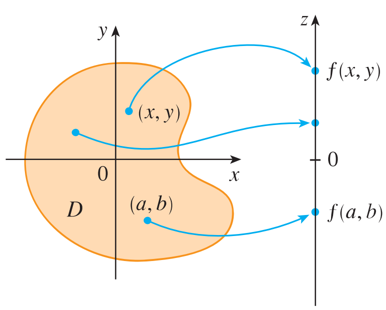


FIGURA 1

Si una función f está dada por una fórmula y no se especifica dominio alguno, entonces se entiende que el dominio de f será el conjunto de parejas (x, y) para el cual la expresión dada es un número bien definido.

EJEMPLO 1 Para las funciones siguientes, evalúe $f(3, 2)$ y determine y grafique el dominio.

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

SOLUCIÓN

a)
$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

La expresión para f tiene sentido si el denominador no es cero y la cantidad dentro del signo de raíz cuadrada es no negativa. Entonces, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0,\ x \neq 1\}$$

La desigualdad $x + y + 1 \geqslant 0$, o $y \geqslant -x - 1$, describe los puntos que quedan en o por

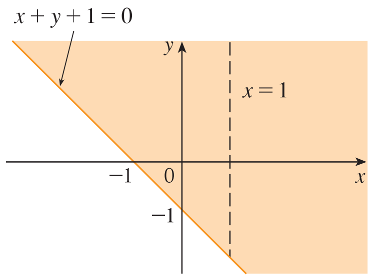


FIGURA 2
Dominio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

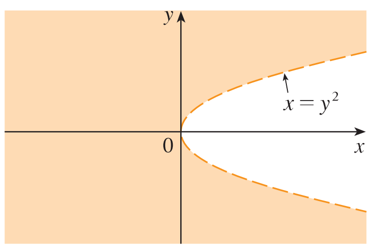


FIGURA 3
Dominio de $f(x, y) = x\ln(y^2 - x)$

arriba de la recta $y = -x - 1$, mientras que $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ tienen que ser excluidos del dominio (véase figura 2).

b) $$f(3, 2) = 3\ln(2^2 - 3) = 3\ln 1 = 0$$

Puesto que $\ln(y^2 - x)$ se define sólo cuando $y^2 - x > 0$, es decir, $x < y^2$, el dominio de f es $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Éste es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$. Véase figura 3.

No todas las funciones se dan en fórmulas explícitas. La función del ejemplo siguiente se describe en forma verbal y mediante estimaciones numéricas de sus valores.

EJEMPLO 2 En regiones donde el invierno es extremoso, el *índice de temperatura de sensación* se utiliza a menudo para representar la intensidad evidente del frío. Este índice W es una temperatura subjetiva que depende de la temperatura real T y de la rapidez del viento v. De este modo, W es una función de T y de v, y se escribe $W = f(T, v)$. En la tabla 1 se registran los valores de W que reunió el National Weather Service de Estados Unidos y el Meteorological Service de Canadá.

TABLA 1 Índice de temperatura de sensación en función de la temperatura del aire y de la velocidad del viento.

Rapidez del viento (km/h) — Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por ejemplo, la tabla 1 muestra que si la temperatura es −5 °C y la rapidez del viento es de 50 km/h, entonces subjetivamente se sentiría tanto frío como si la temperatura fuera de casi −15 °C sin viento. Entonces

$$f(-5, 50) = -15$$

EJEMPLO 3 En 1928 Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el cual modelaban el crecimiento de la economía estadounidense durante el periodo 1899-1922. Consideraron un punto de vista simplificado de la economía en el cual la producción está determinada por la cantidad de mano de obra relacionada y la cantidad de capital invertido. Si bien hay muchos otros factores que afectan el rendimiento económico, su modelo resultó ser notablemente exacto. La función mediante la cual modelaron la producción era de la forma

$$\boxed{1} \qquad P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

donde P es la producción total (el valor monetario de todos los bienes que se producen en un año), L es la cantidad de mano de obra (la cantidad total de horas-hombre

Nuevo índice de temperatura de sensación
Se instituyó un nuevo índice de temperatura de sensación en noviembre de 2001, y es más exacto que el antiguo índice para medir qué tanto frío se siente cuando hace viento. El nuevo índice se basa en un modelo de qué tan rápido la cara de una persona pierde calor. Se desarrolló por medio de estudios clínicos en los cuales personas voluntarias fueron expuestas a una diversidad de temperaturas y magnitudes de velocidad de viento en un túnel de aire refrigerado.

TABLA 2

Año	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

trabajadas en un año) y K es la cantidad de capital invertido (el valor monetario de toda la maquinaria, equipo y edificios). En la sección 14.3 se demuestra cómo la forma de la ecuación 1 se infiere de ciertas suposiciones económicas.

Cobb y Douglas se apoyaron en datos que publicó el gobierno para obtener la tabla 2. Tomaron el año 1899 como una línea de referencia y a P, L y K para 1899 se les asignó el valor de 100. Los valores de otros años se expresaron como porcentajes de los valores de 1899.

Cobb y Douglas aplicaron el método de los mínimos cuadrados para ajustar los datos de la tabla 2 a la función

$$\boxed{2} \qquad P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

(Véase ejercicio 79 si desea mayores detalles.)

Si usamos el modelo dado por la función en la ecuación 2 para calcular la producción en los años 1910 y 1920, obtenemos los valores

$$P(147, 208) = 1.01(147)^{0.75}(208)^{0.25} \approx 161.9$$

$$P(194, 407) = 1.01(194)^{0.75}(407)^{0.25} \approx 235.8$$

que son muy cercanos a los valores reales, 159 y 231.

La función de la producción $\boxed{1}$ se usó posteriormente en muchos contextos, que van desde compañías individuales hasta cuestiones económicas globales. Ahora se le conoce como la **función de la producción de Cobb-Douglas.** Su dominio es $\{(L, K) \mid L \geqslant 0, K \geqslant 0\}$ porque L y K representan mano de obra y capital y, por lo tanto, nunca son negativas.

EJEMPLO 4 Determine el dominio y el rango de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN El dominio de g es

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

que es el disco con centro (0, 0) y radio 3 (véase figura 4). El rango de g es

$$\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\}$$

Puesto que z es una raíz cuadrada positiva, $z \geqslant 0$. Asimismo, como $9 - x^2 - y^2 \leqslant 9$, tenemos

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

y el rango es

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$

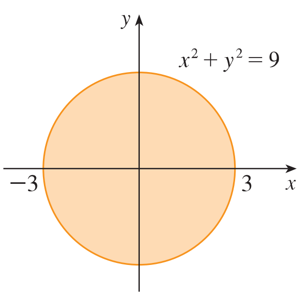


FIGURA 4
Dominio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Gráficas

Otro modo de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica

Definición Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en D.

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$. Podemos visualizar la gráfica S de f directamente sobre o abajo de su dominio D en el plano xy (véase figura 5).

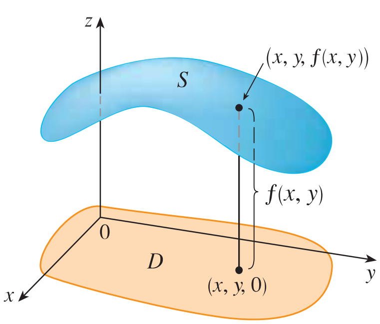


FIGURA 5

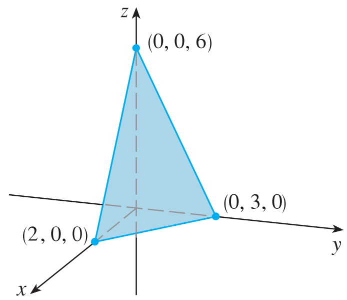


FIGURA 6

EJEMPLO 5 Grafique la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUCIÓN La gráfica de f tiene la ecuación $z = 6 - 3x - 2y$, o $3x + 2y + z = 6$, que representa un plano. Para graficar el plano, primero obtenemos las intersecciones con los ejes. Hacemos $y = z = 0$ en la ecuación y obtenemos $x = 2$ como la intersección con el eje x. Con el mismo procedimiento obtenemos la intersección con el eje y, que es 3, y la del eje z, que es 6. Ya con esto puede trazar la parte de la gráfica que está en el primer octante (véase figura 6).

La función del ejemplo 5 es un caso especial de la función

$$f(x, y) = ax + by + c$$

que se llama **función lineal**. La gráfica de dicha función tiene por ecuación

$$z = ax + by + c \qquad \text{o} \qquad ax + by - z + c = 0$$

por lo que es un plano. Así como las funciones lineales de una sola variable son importantes en el cálculo de una variable, veremos que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel fundamental en el cálculo de varias variables.

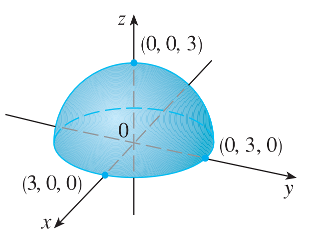


FIGURA 7
Gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

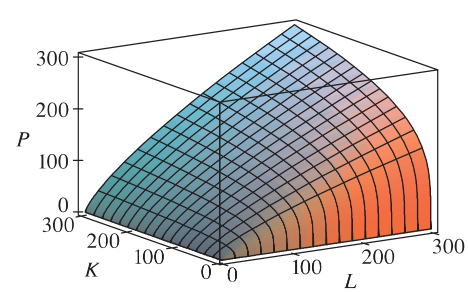
SOLUCIÓN La ecuación de la gráfica es $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtiene $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, es decir $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que se reconoce como la ecuación de la esfera con centro en el origen y radio 3. Pero como $z \geqslant 0$, la gráfica de g es sólo la parte superior de esta esfera (véase figura 7).

NOTA No toda esfera puede ser representada por una sola función de x y y. Como se vio en el ejemplo 6, el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ está representado por la función $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. El hemisferio inferior está representado por la función $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

EJEMPLO 7 Mediante una computadora, trace la gráfica de la función de la producción de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

SOLUCIÓN En la figura 8 se muestra la gráfica de P para valores de la mano de obra L y el capital K que está entre 0 y 300. La computadora dibujó la superficie con trazas verticales. Según estas trazas el valor de la producción P se incrementa cuando L o K se incrementan, como era de esperarse.

FIGURA 8



V EJEMPLO 8 Determine el dominio y el rango y grafique $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Observe que $h(x, y)$ está definida por todos los pares ordenados posibles de números reales (x, y), de modo que el dominio es $\mathbb{R}^2$, todo el plano xy. El rango de h es el conjunto $[0, \infty)$ de todos los números reales no negativos. [Observe que $x^2 \geqslant 0$ y $y^2 \geqslant 0$, de modo que $h(x, y) \geqslant 0$ para toda x y y.]

La gráfica de h tiene la ecuación $z = 4x^2 + y^2$, la cual es el paraboloide elíptico que se dibujó en el ejemplo 4 de la sección 12.6. Las trazas horizontales son elipses y las verticales son parábolas (véase figura 9).

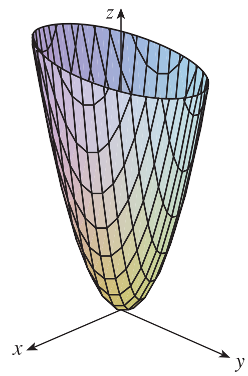
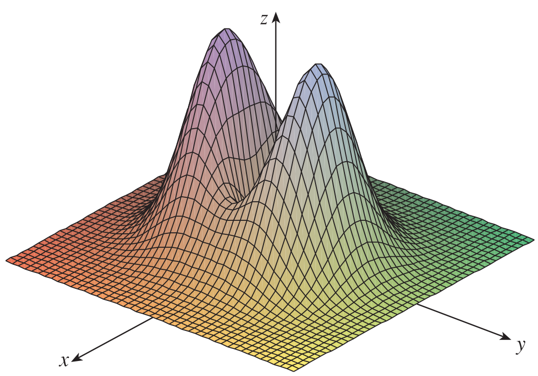


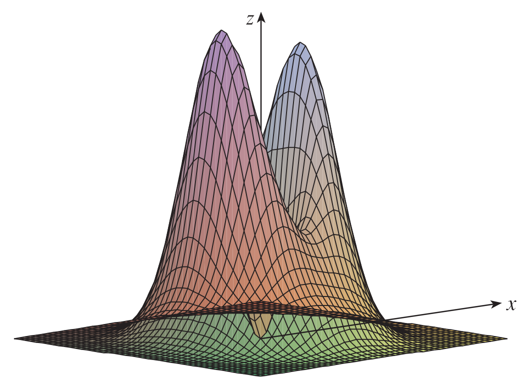
FIGURA 9
Gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

Hay programas para computadora con los que se pueden obtener las gráficas de funciones de dos variables. En la mayoría de dichos programas las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores de k separados regularmente, y se eliminan algunas partes de la gráfica usando alguna función que elimine líneas ocultas.

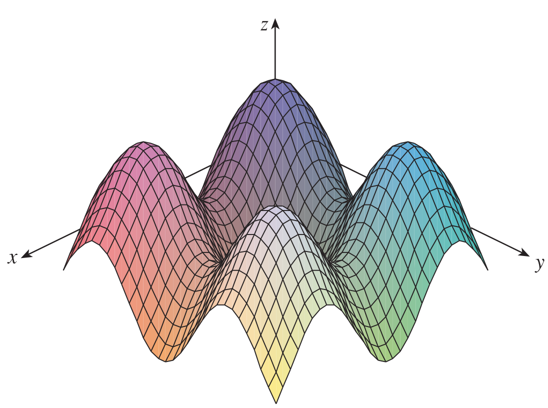
En la figura 10 se ilustran gráficas de varias funciones generadas mediante una computadora. Observe que se consigue una imagen especialmente buena de una función cuando se usa la rotación para tener diferentes puntos de vista. En los incisos a) y b) la gráfica de f



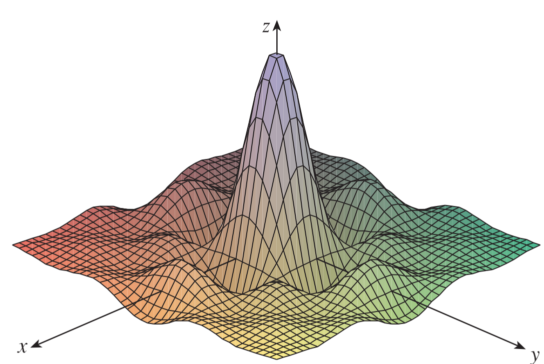
a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



c) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$



d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

FIGURA 10

es muy plana y cercana al plano xy excepto cerca del origen. La razón es que $e^{-x^2-y^2}$ es muy pequeña cuando x o y es grande.

Curvas de nivel

Hasta ahora se cuenta con dos métodos para representar funciones: diagramas de flechas y gráficas. Un tercer método, tomado prestado de los cartógrafos, es un mapa de curvas de nivel en el cual puntos de elevación igual se unen para formar *líneas de contorno* o *curvas de nivel*.

Definición Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k. En otras palabras, señala dónde tiene una altura k la gráfica de f.

Podemos ver en la figura 11 la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel $f(x, y) = k$ son justamente las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy. Entonces, si dibujamos las curvas de nivel de una función y las representamos como elevaciones de la superficie a la altura indicada, entonces podemos formar mentalmente una imagen de la gráfica. La superficie tiene pendiente abrupta donde las curvas de nivel están muy cercanas entre sí. Es algo más plana donde las curvas de separan.

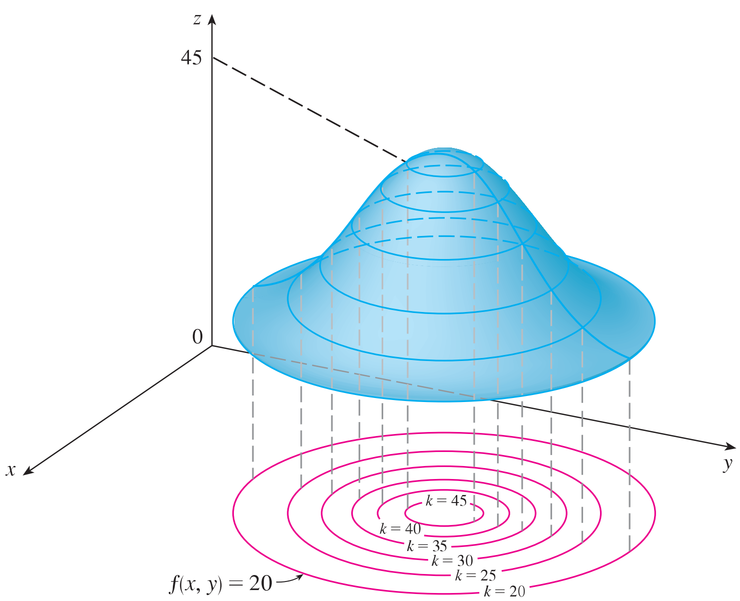


FIGURA 11

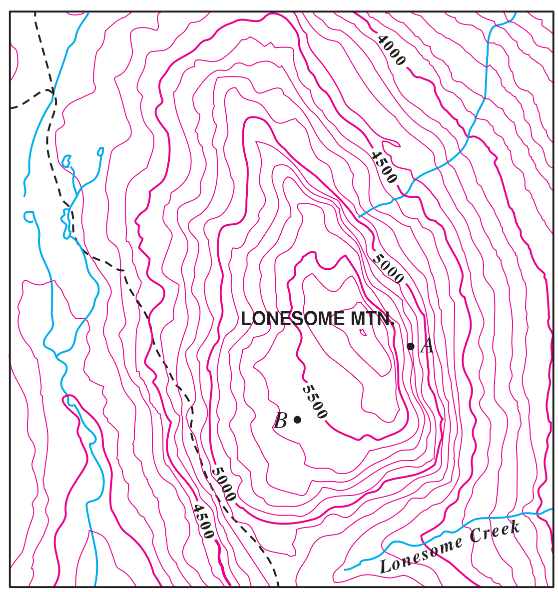


FIGURA 12

TEC Visual 14.1A proporciona figuras animadas de la figura 11 y muestra cómo se alzan las curvas de nivel hasta tener las gráficas de funciones.

Un ejemplo común de las curvas de nivel son los mapas topográficos de regiones montañosas, como el mapa de la figura 12. Las curvas de nivel son curvas de elevación constante por arriba del nivel del mar. Si camináramos por una de esas curvas de nivel, nunca ascenderíamos ni descenderíamos. Otro ejemplo común es la función de temperatura mencionada en la introducción de esta sección. En este caso, las curvas de nivel se denominan **isotermas**, y unen localidades con la misma temperatura. En la figura 13 se muestra un mapa climático de la cuenca del Océano Pacífico, en el que se indican las temperaturas promedio de un mes cualquiera. Las isotermas son las curvas que separan las bandas de colores

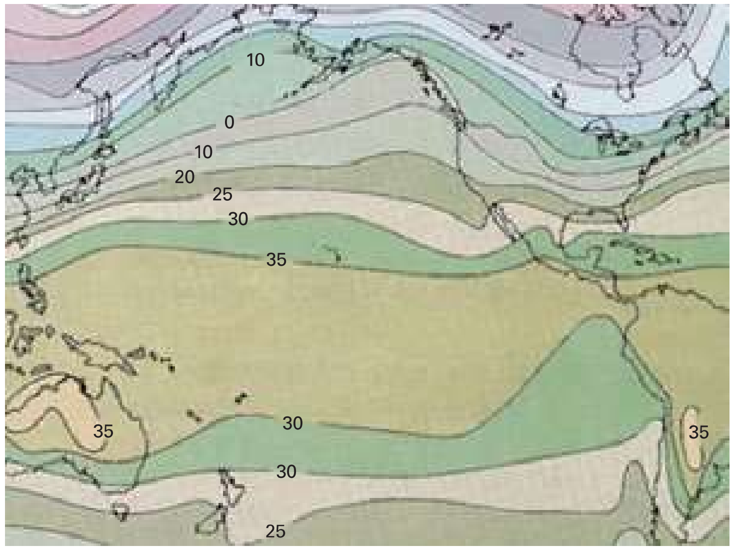


FIGURA 13
Promedio de temperaturas del Océano Pacífico en grados Celsius

EJEMPLO 9 Un mapa de líneas de contorno de una función f se ilustra en la figura 14. Úselo para estimar los valores de $f(1, 3)$ y $f(4, 5)$.

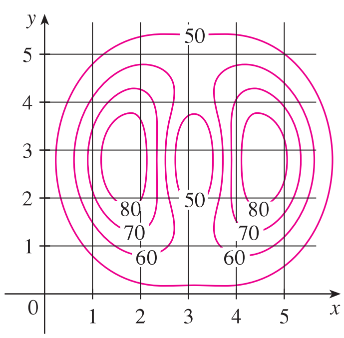


FIGURA 14

SOLUCIÓN El punto (1, 3) queda entre las curvas de nivel con valores de z de 70 y 80. Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

En forma similar, estimamos que $\qquad f(4, 5) \approx 56$

EJEMPLO 10 Grafique las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para los valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$6 - 3x - 2y = k \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Ésta es una familia de rectas cuya pendiente es $-\frac{3}{2}$. Las cuatro curvas de nivel particulares con $k = -6, 0, 6$ y 12 son $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$ y $3x + 2y + 6 = 0$. Se grafican en la figura 15. Entre las curvas de nivel hay una separación igual, y dichas curvas son rectas paralelas porque la gráfica de f es un plano (véase figura 6).

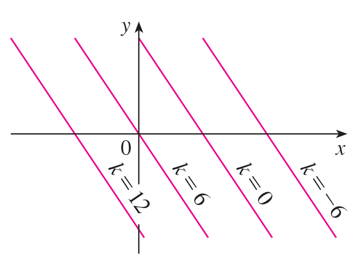


FIGURA 15
Mapa de contorno de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

V EJEMPLO 11 Grafique las curvas de nivel de la función

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{o bien} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Ésta es una familia de circunferencias concéntricas con centro (0, 0) y radio $\sqrt{9 - k^2}$. Los casos $k = 0, 1, 2, 3$ se ilustran en la figura 16. Intente imaginar estas curvas de nivel elevadas desde la superficie, y compare con la gráfica de g (un hemisferio) de la figura 7. (Véase TEC Visual 14.1A.)

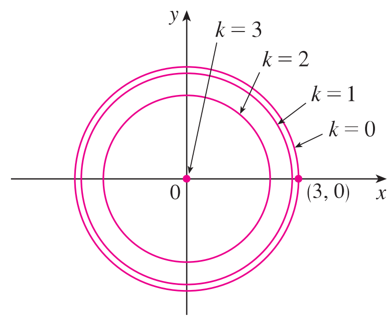


FIGURA 16
Mapa de contorno de
$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

EJEMPLO 12 Grafique algunas curvas de nivel de la función $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k - 1)} + \frac{y^2}{k - 1} = 1$$

la cual, para $k > 1$, describe una familia de elipses con semiejes $\frac{1}{2}\sqrt{k - 1}$ y $\sqrt{k - 1}$. En la figura 17a) se ilustra un mapa de contorno de h dibujado mediante una computadora. La figura 17b) muestra estas curvas de nivel elevadas para obtener la gráfica de h (un paraboloide elíptico), donde se transforman en trazas horizontales. En la figura 17 aparece cómo se ve la gráfica de h a partir de las curvas de nivel.

TEC Visual 14.1B muestra la conexión entre las superficies y sus mapas de contorno.

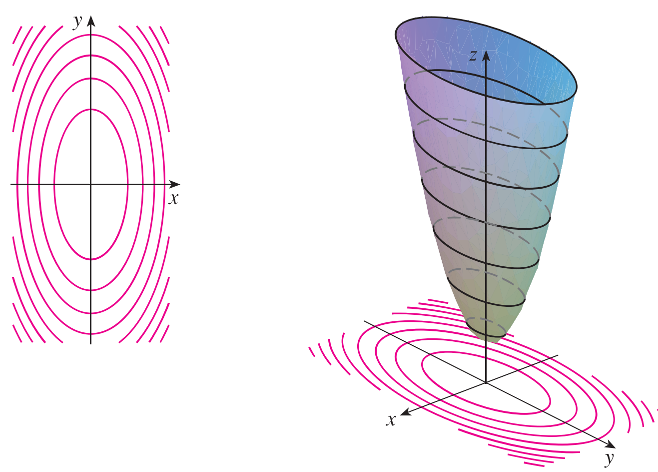


FIGURA 17
La gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$
se forma elevando las curvas de nivel.

a) Mapa de contorno   b) Trazas horizontales, son curvas de nivel elevadas

EJEMPLO 13 Trace curvas de nivel para la función de la producción de Cobb-Douglas del ejemplo 3.

SOLUCIÓN En la figura 18 se ilustran las curvas que se obtuvieron mediante una computadora para la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

Las curvas de nivel se marcan con el valor de la producción P. Por ejemplo, la curva de nivel marcada con 140 muestra todos los valores de la mano de obra L y las inversiones de capital K que dan como resultado una producción de $P = 140$. En el caso de un valor fijo de P, cuando L se incrementa K disminuye, y viceversa.

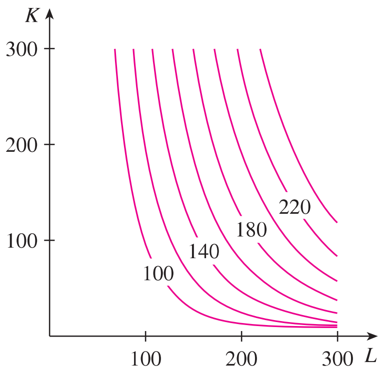
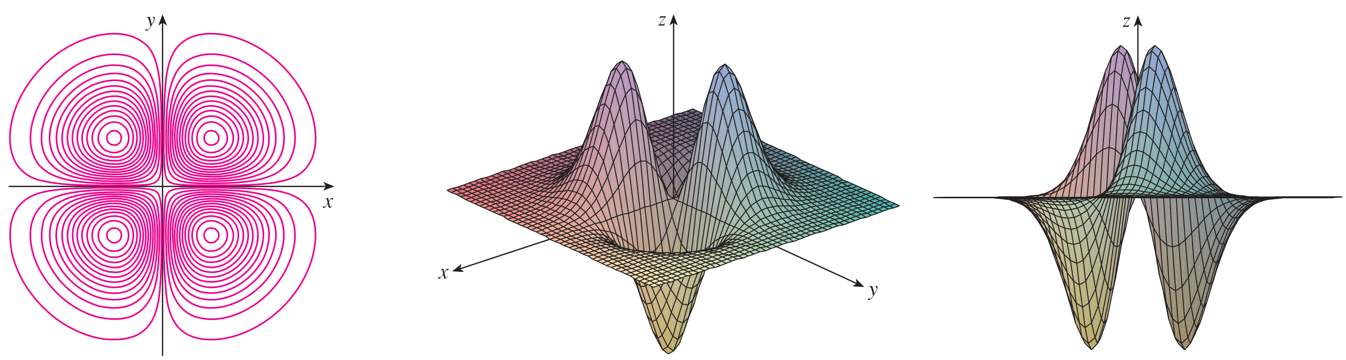


FIGURA 18

Para algunos propósitos, un mapa de curvas de nivel es más útil que una gráfica. Esto es particularmente cierto en el ejemplo 13. (Compare la figura 18 con la figura 8.) También es válido estimar valores de las funciones, como en el ejemplo 9.

En la figura 19 se muestran algunas curvas de nivel obtenidas mediante computadora junto con sus gráficas correspondientes elaboradas de la misma manera. Observe que las curvas de nivel del inciso c) se agrupan cerca del origen. La razón es que la gráfica del inciso d) tiene una pendiente abrupta cerca del origen.



a) Curvas de nivel de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

b) Dos vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

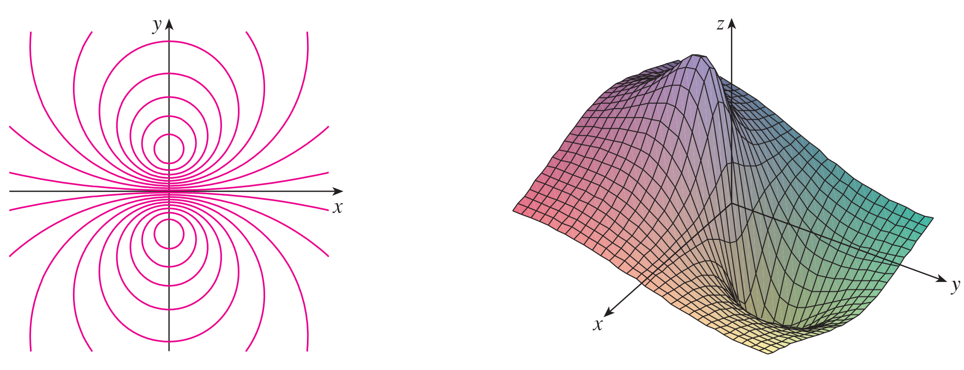


FIGURA 19 c) Curvas de nivel de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

Funciones de tres o más variables

Una **función de tres variables**, f, es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un único número real denotado por $f(x, y, z)$. Por ejemplo, la temperatura T en un punto sobre la superficie de la Tierra depende de la longitud x, latitud y del punto y del tiempo t, de modo que puede escribir $T = f(x, y, t)$.

EJEMPLO 14 Encuentre el dominio de f si

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUCIÓN La expresión para $f(x, y, z)$ está definida siempre que $z - y > 0$, de modo que el dominio de f es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Es un **semiespacio** que consiste en todos los puntos que se ubican por arriba del plano $z = y$.

Es muy difícil imaginar una función f de tres variables mediante su gráfica, ya que se localizaría en un espacio de cuatro dimensiones. No obstante, es posible saber más de f examinando sus **superficies de nivel**, las cuales son las superficies cuyas ecuaciones son $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante. Si el punto (x, y, z) se desplaza por una superficie de nivel, el valor de $f(x, y, z)$ sigue estando fijo.

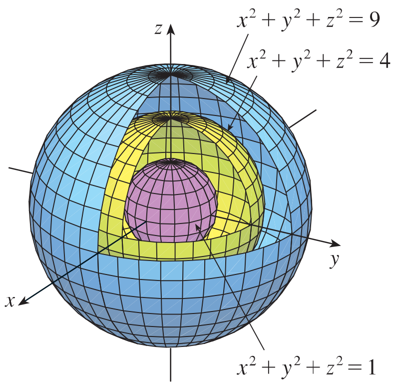


FIGURA 20

EJEMPLO 15 Determine las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUCIÓN Las superficies de nivel son $x^2 + y^2 + z^2 = k$, donde $k \geqslant 0$. Esto forma una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$ (véase figura 20). Así, cuando (x, y, z) varía sobre cualquier esfera con centro en O, el valor de $f(x, y, z)$ se conserva fijo.

También se pueden considerar funciones de cualquier número de variables. Una **función de *n* variables** es una regla que asigna un número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a una n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales. Denotamos con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las n-adas. Por ejemplo, si una compañía utiliza n ingredientes distintos al elaborar un producto alimenticio, c_i es el costo por unidad del i-ésimo ingrediente, y si se usan x_i unidades del i-ésimo ingrediente, entonces el costo total C de los ingredientes es una función de n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$\boxed{3} \qquad C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

La función f es una función de valores reales cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Algunas veces se usa una notación vectorial para escribir dichas funciones de una manera más compacta: si $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, con frecuencia se escribe $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mediante esta notación se vuelve a escribir la función definida en la ecuación 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

donde $\boldsymbol{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n\rangle$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota el producto punto de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$ en V_n.

En vista de la correspondencia uno a uno entre los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y sus vectores de posición $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ en V_n, hay tres formas de ver una función f definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como una función de n variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. Como una función de una sola variable en un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3. Como una función de una variable vectorial única $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$

Los tres puntos de vista son útiles.

14.1 Ejercicios

1. En el ejemplo 2, se considera la función $W = f(T, v)$, donde W es el índice de temperatura de sensación, T es la temperatura real, y v es la rapidez del viento. Una representación numérica se proporciona en la tabla 1.

a) ¿Cuál es el valor de $f(-15, 40)$? ¿Cuál es su significado?

b) Explique el significado de la pregunta "¿Para qué valor de v es $f(-20, v) = -30$?". Luego conteste la pregunta.

c) Explique con sus propias palabras el significado de la pregunta "¿Para qué valor de T es $(T, 20) = -49$?". Luego conteste la pregunta.

d) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(-5, v)$? Describa el comportamiento de esta función.

e) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(T, 50)$? Describa el comportamiento de esta función.

2. El *índice temperatura-humedad* I (o humidex, para abreviar) es la temperatura del aire que se percibe cuando la temperatura real es T y la humedad relativa es h, de modo que es posible escribir $I = f(T, h)$. La tabla de valores siguiente de I es una parte de una tabla que elaboró la National Oceanic and Atmospheric Administration.

TABLA 3 Temperatura aparente como una función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F)

T \ h	20	30	40	50	60	70
80	77	78	79	81	82	83
85	82	84	86	88	90	93
90	87	90	93	96	100	106
95	93	96	101	107	114	124
100	99	104	110	120	132	144

a) ¿Cuál es el valor de $f(95, 70)$? ¿Qué significa?

b) ¿Para qué valor de h es $f(90, h) = 100$?

c) ¿Para qué valor de T es $f(T, 50) = 88$?

d) ¿Cuál es el significado de las funciones $I = f(80, h)$ e $I = f(100, h)$? Compare el comportamiento de estas dos funciones de h.

3. Un fabricante ha modelado su producción anual como una función P (el valor monetario de toda su producción en millones de dólares) como una función de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$$

donde L es el número de horas de mano de obra (en miles) y K es el capital invertido (en millones de dólares). Encuentre $P(120, 20)$ e interprételo.

4. Compruebe en el caso de la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

analizada en el ejemplo 3 que la producción se duplica si tanto la mano de obra como la cantidad de capital se duplican. Determine si ésta es también válida para la función general de la producción

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

5. Un modelo para el área de la superficie del cuerpo humano está dado por la función

$$S = f(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$$

donde w es el peso (en libras), h es la altura (en pulgadas), y S es medida en pies cuadrados.

a) Encuentre $f(160, 70)$ e interprételo.

b) ¿Cuál es el área de su propio cuerpo?

6. El índice de temperatura de sensación W que se trata en el ejemplo 2 se modeló mediante la función siguiente

$$W(T, v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

Compruebe para ver qué tanto concuerda este modelo con los valores de la tabla 1 para unos pocos valores de T y v.

7. La altura h de las olas en mar abierto depende de la rapidez v del viento y del tiempo t en que el viento ha estado soplando con esa rapidez. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en pies en la tabla 4.

a) ¿Cuál es el valor de $f(40, 15)$? ¿Qué significa?

b) ¿Cuál es el significado $h = f(30, t)$? Describa el comportamiento de esta función.

c) ¿Cuál es el significado $h = f(v, 30)$? Describa el comportamiento de esta función.

TABLA 4

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

8. Una compañía fabrica tres tipos de cajas de cartón: pequeñas, medianas y grandes. El costo para elaborar una caja pequeña es de \$2.50, para la mediana es de \$4.00 y \$4.50 para la caja grande. Los costos fijos son de \$8000.

a) Exprese el costo de elaborar x cajas pequeñas, y cajas medianas y z cajas grandes como una función de tres variables: $C = f(x, y, z)$.

b) Encuentre $f(3000, 5000, 4000)$ e interprételo.

c) ¿Cuál es el dominio de f?

9. Sea $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.

a) Evalúe $g(2, -1)$.

b) Encuentre el dominio de g.

c) Determine el rango de g.

10. Sea $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.

a) Evalúe $F(3, 1)$.

b) Determine y trace el dominio de F.

c) Determine el rango de F.

11. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.

a) Evalúe $f(1, 1, 1)$.

b) Determine y describa el dominio de f.

12. Sea $g(x, y, z) = x^3y^2z\sqrt{10 - x - y - z}$.

a) Evalúe $g(1, 2, 3)$.

b) Determine y describa el dominio de g.

13-22 Determine y grafique el dominio de la función.

13. $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$

14. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

18. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

19. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

22. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

23-31 Trace la gráfica de la función.

23. $f(x, y) = 1 + y$

24. $f(x, y) = 2 - x$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = e^{-y}$

27. $f(x, y) = y^2 + 1$

28. $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2$

29. $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$

30. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

31. $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$

32. Haga corresponder la función con su gráfica (marcadas de I a VI). Dé razones por su elección.

a) $f(x, y) = |x| + |y|$

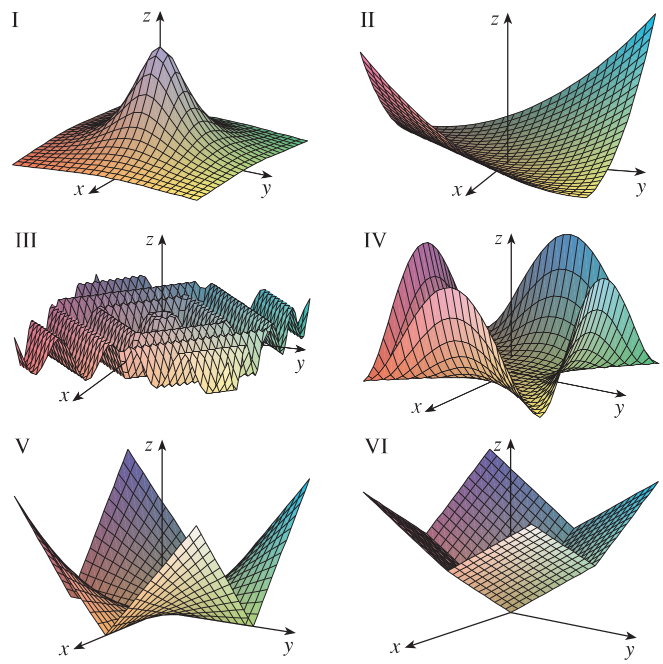
b) $f(x, y) = |xy|$

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

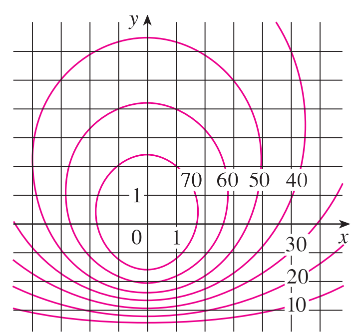
d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

e) $f(x, y) = (x - y)^2$

f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$



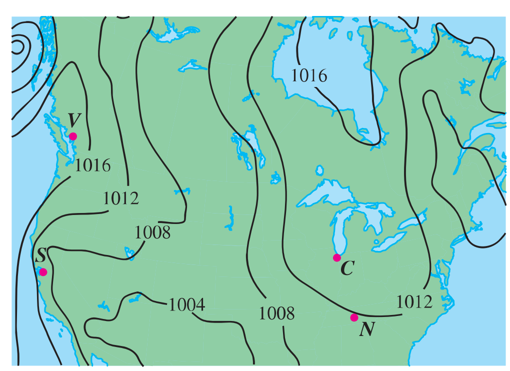
33. Se proporciona un mapa de contorno para una función f. Con éste estime los valores de $f(-3, 3)$ y $f(3, -2)$. ¿Qué puede decir respecto a la forma de la gráfica?



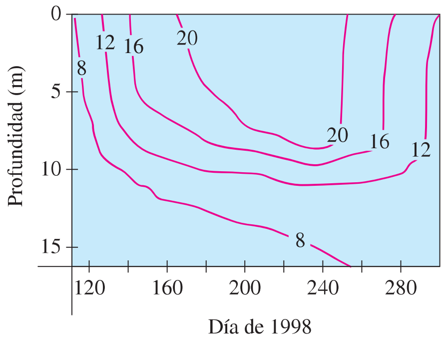
34. El contorno de la figura siguiente corresponde a la presión atmosférica en Norteamérica el 12 de agosto de 2008. Sobre las curvas de nivel (llamadas isobaras) la presión se indica en milibares (mb).

a) Estime la presión en C (Chicago), N (Nashville), S (San Francisco) y V (Vancouver).

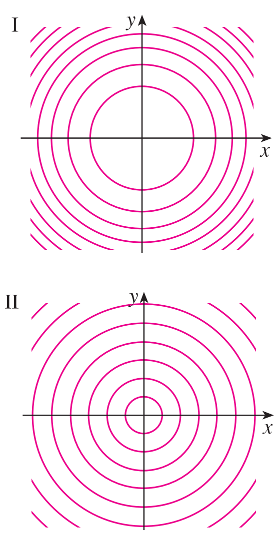
b) ¿En cuáles de estos lugares el viento es más fuerte?



35. Se muestran las curvas de nivel (isotermas) para la temperatura del agua (en °C) en Long Lake (Minnesota) en 1998 como una función de la profundidad y el tiempo en años. Estime la temperatura en el lago el 9 de junio (día 160) a una profundidad de 10 m y el 29 de junio (día 180) a una profundidad de 5 m.

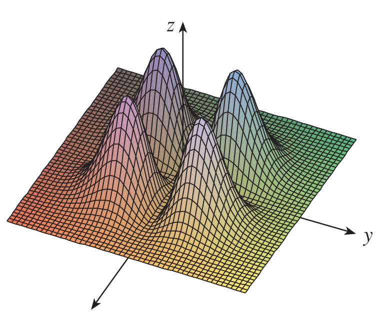


36. Se proporcionan dos mapas de contorno. Uno es para una función f cuya gráfica es un cono. El otro es para una función g cuya gráfica es un paraboloide. ¿Cuál es cuál y por qué?



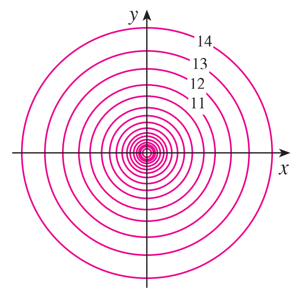
37. Localice los puntos A y B en el mapa de Lonesome Mountain (figura 12). ¿Cómo describiría el terreno cerca de A? ¿Y cerca de B?

38. Elabore un esquema aproximado de un mapa de contorno para la función cuya gráfica se muestra.

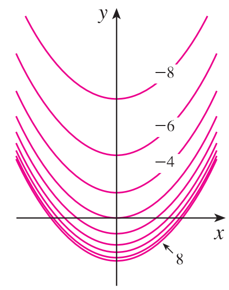


39-42 Se muestra un mapa de contorno de una función. Apóyese en él para elaborar un esquema aproximado de la gráfica de f.

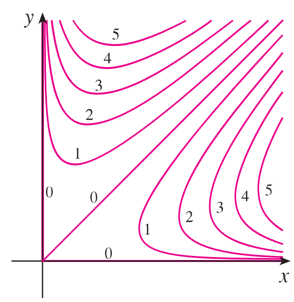
39.



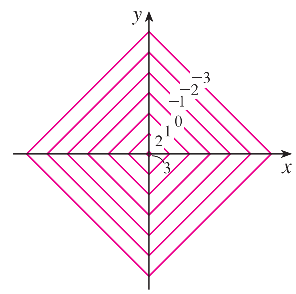
40.



41.



42.



43-50 Dibuje un mapa de contorno de la función mostrando varias curvas de nivel.

43. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

44. $f(x, y) = x^3 - y$

45. $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

46. $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$

47. $f(x, y) = ye^x$

48. $f(x, y) = y \sec x$

49. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

50. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

51-52 Trace ambos mapas de contorno y grafique la función y compárelos.

51. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

52. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

53. Una plancha delgada de metal, situada en el plano xy, está a una temperatura $T(x, y)$ en el punto (x, y). Las curvas de nivel de T se llaman *isotermas* porque la temperatura es igual en todos los puntos sobre la curva. Trace algunas isotermas si la función de temperatura está dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

54. Si $V(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) del plano xy, entonces las curvas de nivel de V se llaman *curvas equipotenciales*, porque en todos los puntos de dicha curva el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales si $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, donde c es una constante positiva.

55-58 Mediante una computadora grafique la función usando varios dominios y desde distintos puntos de vista. Imprima una de esas vistas que, según su opinión, sea muy buena. Si el programa que usted maneja también genera curvas de nivel, grafique algunas curvas de nivel de la misma función y compárelas con la gráfica.

55. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (silla de mono)

56. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (silla de perro)

57. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\operatorname{sen}(x^2) + \cos(y^2))$

58. $f(x, y) = \cos x \cos y$

59-64 Relacione la función a) con su gráfica (gráficas marcadas de A a F y b) con su mapa de contorno (mapas marcados de I a VI). Dé sus razones por qué hizo esa elección.

59. $z = \operatorname{sen}(xy)$

60. $z = e^x \cos y$

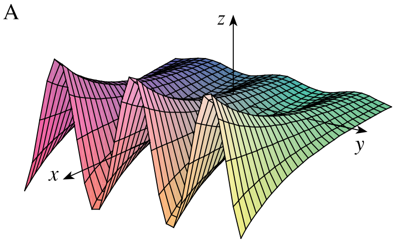
61. $z = \operatorname{sen}(x - y)$

62. $z = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$

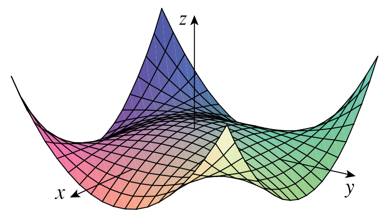
63. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

64. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

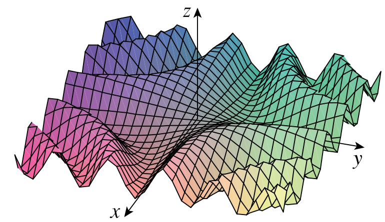
A



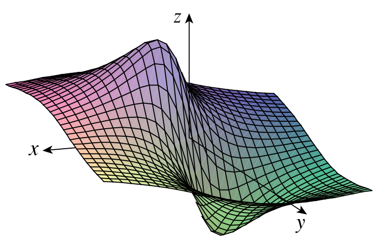
B



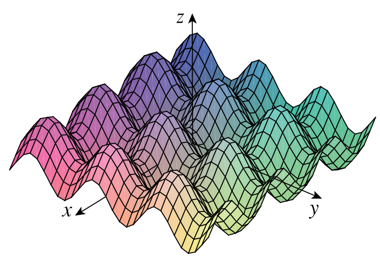
C



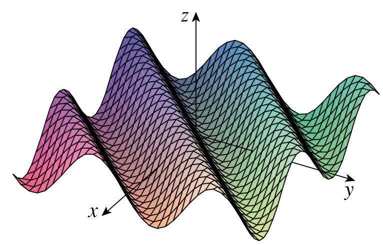
D



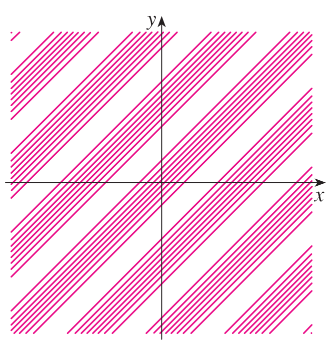
E



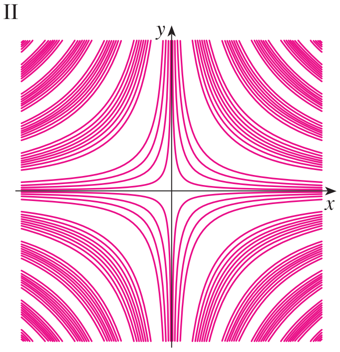
F



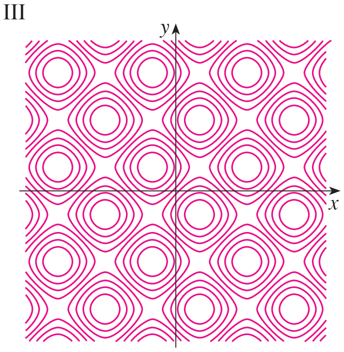
I



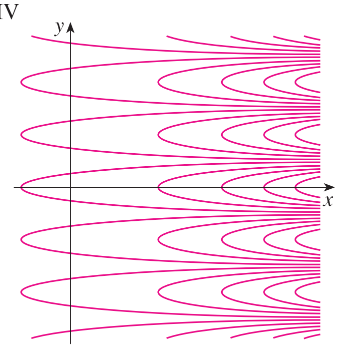
II



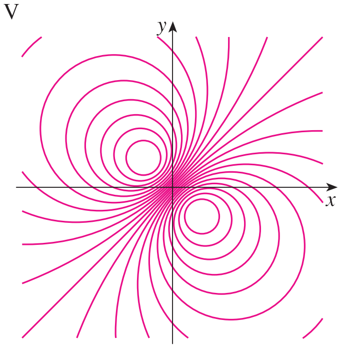
III



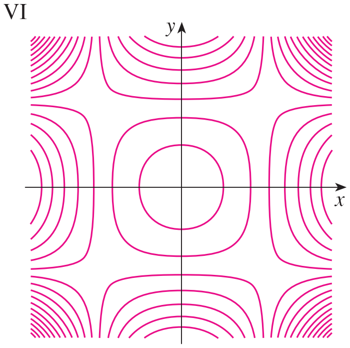
IV



V



VI



65-68 Describa las superficies de nivel de la función.

65. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

66. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

67. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

68. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

69-70 Describa cómo se obtiene la gráfica de g a partir de la gráfica de f.

69. a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$
b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
c) $g(x, y) = -f(x, y)$
d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

70. a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$
b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

71-72 Mediante una computadora grafique la función usando varios dominios y desde varias perspectivas. Imprima una vista en la que se vean claramente los "picos y los valles". ¿Diría usted que la función tiene un valor máximo? ¿Puede identificar algunos puntos en la gráfica que pudiera considerar como "puntos máximos relativos"? ¿Y "puntos mínimos relativos"?

71. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

72. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

73-74 Con la ayuda de una computadora, grafique la función usando varios dominios y desde diferentes puntos de vista. Analice el comportamiento límite de la función. ¿Qué sucede cuando tanto x como y se incrementan? ¿Qué sucede cuando (x, y) se aproxima al origen?

73. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ **74.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

75. Investigue mediante una computadora la familia de las funciones $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. ¿En qué manera depende de c la forma de la gráfica?

76. Use una computadora para investigar la familia de superficies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

¿De qué modo depende la forma de la gráfica de los números a y b?

77. Use una computadora para investigar la familia de superficies $z = x^2 + y^2 + cxy$. En particular, debe determinar los valores de transición de c para los que la superficie cambia de un tipo de superficie cuádrica a otro.

78. Grafique las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

y $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En general, si g es una función de una variable, ¿cómo es la gráfica de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

obtenida a partir de la gráfica de g?

79. a) Demuestre que, al calcular logaritmos, la función de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$ se puede expresar como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

b) Si hacemos $x = \ln(L/K)$ y $y = \ln(P/K)$, la ecuación en el inciso a) se transforma en la ecuación lineal $y = \alpha x + \ln b$. Use la tabla 2 del ejemplo 3 para elaborar una tabla de valores de $\ln(L/K)$ y $\ln(P/K)$ para los años 1899 a 1922. Luego utilice una calculadora graficadora o una computadora para determinar la recta de regresión de mínimos cuadrados que pase por los puntos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

c) Deduzca que la función de la producción según Cobb-Douglas es $P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

14.2 Límites y continuidad

Comparemos el comportamiento de las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

cuando x y y tienden a 0 [por lo tanto, el punto (x, y) se aproxima al origen].

Las tablas 1 y 2 muestran valores de $f(x, y)$ y $g(x, y)$, con una aproximación de tres cifras decimales, para los puntos (x, y) cerca del origen. (Observe que ninguna función está definida en el origen.)

TABLA 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

TABLA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Al parecer, cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$, los valores de $f(x, y)$ se aproximan a 1, en tanto que los valores de $g(x, y)$ no tienden a ningún número. Resulta entonces que estas conjeturas basadas en la evidencia numérica son correctas, por lo que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ no existe}$$

En general, usamos la notación

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

para indicar que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) tiende al punto (a, b) que está en cualquier trayectoria que se encuentra dentro del dominio de f. En otras palabras, podemos hacer los valores de $f(x, y)$ tan cercanos a L como queramos haciendo el punto (x, y) lo suficientemente cercano al punto (a, b), pero no igual a (a, b). Una definición más exacta se presenta a continuación.

1 Definición Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene puntos arbitrariamente cercanos a (a, b). Entonces, decimos que el **límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b)** es L y escribimos

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad (x, y) \in D \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Otras notaciones para el límite en la definición 1 son

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = L \qquad \text{y} \qquad f(x, y) \to L \text{ cuando } (x, y) \to (a, b)$$

Observe que $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L, y $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) y el punto (a, b). Por lo tanto, la definición 1 establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña, pero no cero. En la figura 1 se ilustra la definición 1 mediante un diagrama de flechas. Si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ está dado alrededor de L, entonces podemos encontrar un disco D_δ con centro en (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que f mapea todos los puntos en D_δ [excepto tal vez (a, b)] en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

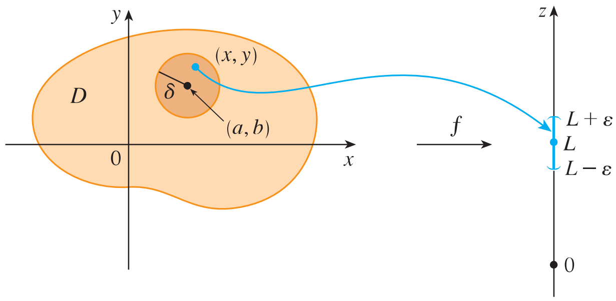


FIGURA 1

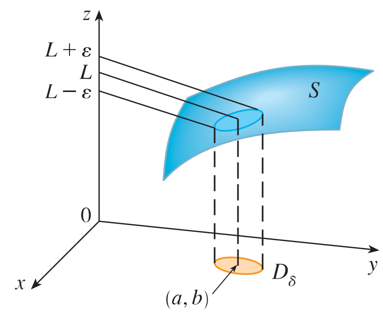


FIGURA 2

Otra ilustración de la definición 1 se muestra en la figura 2, donde la superficie S es la gráfica de f. Si $\varepsilon > 0$ está dada, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si (x, y) está restringido a quedar en el disco D_δ y $(x, y) \neq (a, b)$, entonces la parte correspondiente de S queda entre los planos horizontales $z = L - \varepsilon$ y $z = L + \varepsilon$.

En el caso de funciones de una sola variable, cuando hacemos que x tienda a a, hay sólo dos posibles direcciones de aproximación, por la izquierda o por la derecha. De acuerdo con el capítulo 2, si $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, entonces $\lim_{x \to a}$ no existe.

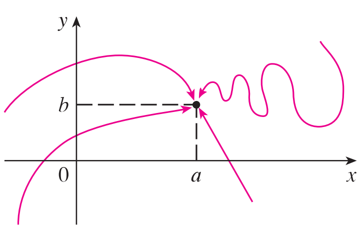


FIGURA 3

En el caso de funciones de dos variables, la situación no es tan sencilla, porque puede hacer que (x, y) tiendan a (a, b) desde un infinito de direcciones de cualquier manera (véase figura 3) siempre que (x, y) permanezca dentro del dominio de f.

La definición 1 establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña, haciendo la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña, pero no cero. La definición se refiere sólo a la *distancia* entre (x, y) y (a, b). No se refiere a la dirección de aproximación. Por consiguiente, si existe el límite, entonces $f(x, y)$ tiene que aproximarse al mismo límite sin que importe cómo (x, y) se aproxima a (a, b). Por lo tanto, si encontramos dos trayectorias distintas de aproximación a lo largo de las cuales la función $f(x, y)$ tiene diferentes límites, entonces se infiere que $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ no existe.

> Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1, y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ no existe.

V EJEMPLO 1 Demuestre que $\displaystyle \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primero nos aproximamos a $(0, 0)$ por el eje x. Entonces $y = 0$ da $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para toda $x \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Ahora nos aproximamos por el eje y haciendo $x = 0$. Entonces $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para toda $y \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to -1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

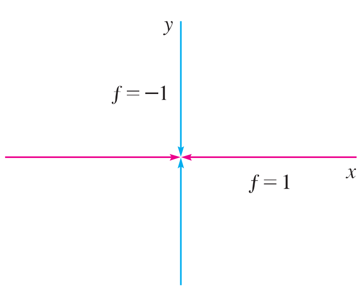


FIGURA 4

(Véase figura 4.) Puesto que f tiene dos límites diferentes a lo largo de dos rectas distintas, el límite dado no existe. [Esto confirma la conjetura hecha con base en evidencia numérica al principio de esta sección.]

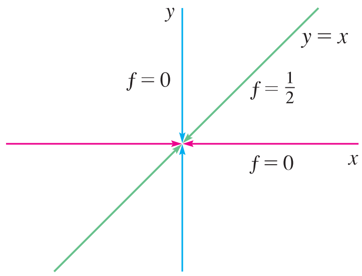


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, ¿existe $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Si $y = 0$, entonces $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Por lo tanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Si $x = 0$, entonces $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, así que

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

Aunque hemos obtenido límites idénticos a lo largo de los ejes, eso no demuestra que el límite dado sea 0. Aproximémonos a (0, 0) a lo largo de otra recta, digamos, $y = x$. Para toda $x \neq 0$.

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\qquad f(x, y) \to \frac{1}{2} \qquad$ cuando $\qquad (x, y) \to (0, 0)$ por $y = x$

(Véase figura 5.) Puesto que hemos obtenido distintos límites en distintas trayectorias, el límite dado no existe.

La figura 6 arroja alguna luz en el ejemplo 2. La cresta que se forma por arriba de la recta $y = x$ corresponde al hecho de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos los puntos (x, y) en esa recta, excepto en el origen.

TEC En Visual 14.2, una recta que gira en la superficie de la figura 6 muestra diferentes límites en el origen a partir de distintas direcciones.

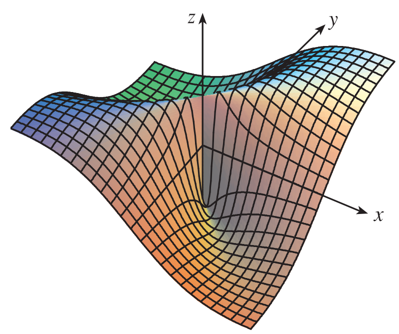


FIGURA 6

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

V EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, ¿existe $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Con la solución del ejemplo 2 en mente, tratemos de ahorrar tiempo haciendo $(x, y) \to (0, 0)$ por cualquier recta no vertical que pase por el origen. Entonces, $y = mx$, donde m es la pendiente y

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

De este modo $\qquad f(x, y) \to 0 \qquad$ cuando $\qquad (x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de $y = mx$

Por lo tanto, f tiene el mismo valor límite a lo largo de toda recta no vertical que pase por el origen. Pero esto no demuestra que el límite dado sea 0, porque si hacemos $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la parábola $x = y^2$, tenemos

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

En la figura 7 se ilustra la gráfica de la función del ejemplo 3. Observe que hay una cresta por encima de la parábola $x = y^2$.

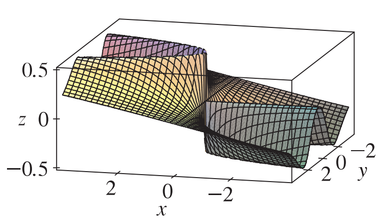


FIGURA 7

por lo que $\quad f(x, y) \to \frac{1}{2} \quad$ cuando $\quad (x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de $x = y^2$

Puesto que por distintas trayectorias se obtienen diferentes valores límite, el límite dado no existe.

Observe ahora los límites que *sí* existen. Justo como en el caso de las funciones de una variable, el cálculo de límites de las funciones de dos variables se puede simplificar en gran medida mediante el uso de las propiedades de los límites. Las leyes de los límites que se listan en la sección 2.3, se pueden generalizar a las funciones de dos variables: el límite de una suma es la suma de los límites, el límite de un producto es el producto de los límites, y así sucesivamente. En particular, las ecuaciones siguientes son válidas

$$\boxed{2} \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} x = a \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} c = c$$

El teorema de compresión también se cumple.

EJEMPLO 4 Calcule $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ si existe.

SOLUCIÓN Al igual que en el ejemplo 3, demuestre que el límite a lo largo de cualquier recta que pase por el origen es 0. Esto no demuestra que el límite dado sea 0, pero los límites a lo largo de las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ también resultan ser 0, de modo que sospechamos que el límite existe y es igual a 0.

Sea $\varepsilon > 0$. Se busca determinar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

es decir,
$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Pero $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ porque $y^2 \geqslant 0$, de modo que $x^2/(x^2 + y^2) \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$\boxed{3} \qquad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leqslant 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Por tanto, si elegimos $\delta = \varepsilon/3$ y hacemos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

De aquí que, según la definición 1,

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Otro modo de resolver el ejemplo 4 es aplicar el teorema de compresión en lugar de la definición 1. De $\boxed{2}$ se infiere que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} 3|y| = 0$$

y entonces la primera desigualdad de $\boxed{3}$ muestra que el límite dado es 0.

Continuidad

Recuerde que es fácil evaluar los límites de funciones *continuas* con una variable. Se realiza sustituyendo en forma directa porque la propiedad que define una función continua es $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Las funciones continuas de dos variables se definen también por medio de la propiedad de sustitución.

4 Definición Una función f de dos variables se llama **continua en** (a, b) si

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Decimos que f es **continua sobre D** si f es continua en todos los puntos (a, b) en D.

El significado intuitivo de continuidad es que si el punto (x, y) cambia una pequeña cantidad, entonces el valor de $f(x, y)$ cambia una pequeña cantidad. Esto significa que una superficie que es la gráfica de una función continua no tiene agujeros ni grietas.

Al aplicar las propiedades de los límites, podemos ver que las sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas son continuas sobre sus dominios. Se usa este hecho para dar ejemplos de funciones continuas.

Una **función polinomial de dos variables** (o polinomial, para abreviar), es una suma de términos de la forma $cx^m y^n$, donde c es una constante y m y n son enteros no negativos. Una **función racional** es una razón de polinomiales. Por ejemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

es una función polinomial, mientras

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

es una función racional.

Los límites en $\boxed{2}$ demuestran que las funciones $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ y $h(x, y) = c$ son continuas. Puesto que cualquier polinomial se puede conformar con las funciones simples f, g y h mediante multiplicación o adición, se infiere que *todas las polinomiales son continuas sobre* $\mathbb{R}^2$. De igual manera, cualquier función racional es continua sobre su dominio, porque es un cociente de funciones continuas.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ es una polinomial y es continua, entonces se puede encontrar el límite mediante la sustitución directa:

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

EJEMPLO 6 ¿Dónde es continua la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

SOLUCIÓN La función f es discontinua en $(0, 0)$ porque allí no está definida. Puesto que f es una función racional, es continua sobre su dominio, que es el conjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

EJEMPLO 7 Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aquí g se define en $(0, 0)$ pero g es discontinua ahí porque $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} g(x, y)$ no existe (véase ejemplo 1).

En la figura 8 se muestra la gráfica de la función continua del ejemplo 8.

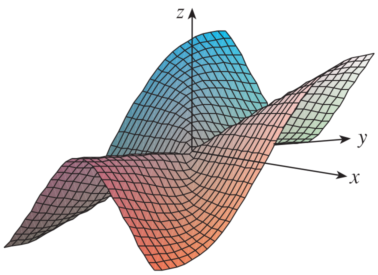


FIGURA 8

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sabemos que f es continua para $(x, y) \neq (0, 0)$ puesto que es igual a una función racional. Asimismo, según el ejemplo 4

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Por lo tanto, f es continua en $(0, 0)$ y entonces es continua sobre $\mathbb{R}^2$.

Igual que en el caso de una función de una variable, la composición es otra manera de combinar dos funciones continuas para obtener una tercera. De hecho, se puede demostrar que si f es una función continua de dos variables y g es una función continua de una variable que está definida en el rango de f, entonces la función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es también una función continua.

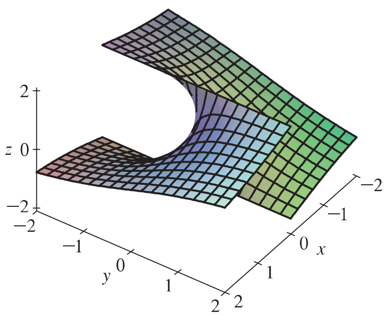


FIGURA 9
La función $h(x, y) = \arctan(y/x)$ es discontinua donde $x = 0$.

EJEMPLO 9 ¿Dónde es continua la función $h(x, y) = \arctan(y/x)$?

SOLUCIÓN La función $f(x, y) = y/x$ es una función racional y por lo tanto continua, excepto sobre la recta $x = 0$. La función $g(t) = \arctan t$ es continua en todas partes. Entonces la función compuesta

$$g(f(x, y)) = \arctan(y/x) = h(x, y)$$

es continua excepto donde $x = 0$. La gráfica de la figura 9 muestra una grieta en la gráfica de h arriba del eje y.

Funciones de tres o más variables

Todo lo que hemos visto en esta sección se puede generalizar a funciones de tres o más variables. La notación

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que los valores de $f(x, y, z)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y, z) tiende al punto (a, b, c) a lo largo de cualquier trayectoria en el dominio de f. Como la distancia entre dos puntos (x, y, z) y (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ está dada por $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, podemos escribir la definición exacta como sigue: para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad (x, y, z) \text{ está en el dominio de } f \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$$

$$\text{entonces} \quad |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

La función f es **continua** en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por ejemplo, la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

es una función racional de tres variables, y entonces es continua en todos los puntos en $\mathbb{R}^3$, excepto donde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En otras palabras, es discontinua sobre la esfera con centro en el origen y radio 1.

Si usamos la notación vectorial introducida al final de la sección 14.1, entonces podemos escribir la definición de límite para funciones de dos o tres variables en una sola forma compacta como sigue.

5 Si f se define sobre un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad \mathbf{x} \in D \quad \text{y} \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que si $n = 1$, entonces $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{a} = a$, y $\boxed{5}$ es justamente la definición de un límite para funciones de una variable. Para el caso $n = 2$, tenemos $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b\rangle$, y $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de modo que $\boxed{5}$ se transforma en la definición 1. Si $n = 3$, entonces $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c\rangle$, y $\boxed{5}$ se vuelve la definición de un límite de una función de tres variables. En cada caso, la definición de continuidad se puede escribir como

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 Ejercicios

1. Suponga que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x, y) = 6$. ¿Qué puede decir respecto al valor de $f(3, 1)$? ¿Y si f es continua?

2. Explique por qué cada una de las funciones es continua o discontinua.

a) La temperatura en el exterior como función de la longitud, latitud y tiempo.

b) Elevación (altura sobre el nivel del mar) en función de la longitud, latitud y tiempo.

c) El costo de un viaje en taxi en función de la distancia recorrida y el tiempo.

3-4 Mediante una tabla de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) cerca del origen plantee alguna conjetura acerca del valor del límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Luego explique por qué su conjetura es correcta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$

4. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5-22 Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2)$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x + y)$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\dfrac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5y^4\cos^2 x}{x^4 + y^4}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^4 + y^4}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2}$

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^8}$

19. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2}\tan(xz)$

20. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

22. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23-24 Mediante una computadora, grafique la función para explicar por qué el límite no existe.

23. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

24. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25-26 Encuentre $h(x, y) = g(f(x, y))$ y el conjunto en el cual h es continua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t, \quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27-28 Grafique la función y observe dónde es discontinua. Luego use la fórmula para explicar lo que ha observado.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$

28. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29-38 Determine el conjunto de puntos en los cuales la función es continua.

29. $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$

30. $F(x, y) = \cos\sqrt{1 + x - y}$

31. $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

32. $H(x, y) = \dfrac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34. $G(x, y) = \tan^{-1}\left((x + y)^{-2}\right)$

35. $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 + z^2)$

36. $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2}\,\ln z$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39-41 Mediante coordenadas polares determine el límite. [Si (r, θ) son las coordenadas polares del punto (x, y) con $r \geqslant 0$, observe que $r \to 0^+$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

---

42. Al inicio de esta sección se consideró la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

y se conjeturó que $f(x, y) \to 1$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ con base en evidencia numérica. Use coordenadas polares para confirmar el valor del límite. Luego grafique la función.

43. Grafique y discuta la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

44. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

a) Demuestre que $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier trayectoria que pase por $(0, 0)$ de la forma $y = mx^a$ con $a < 4$.

b) No obstante el inciso a), demuestre que f es discontinua en $(0, 0)$.

c) Demuestre que f es discontinua sobre dos curvas enteras.

45. Demuestre que la función f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ es continua sobre $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Si $\mathbf{c} \in V_n$, demuestre que la función f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ es continua sobre $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas parciales

En un día caluroso la humedad extrema hace pensar que la temperatura es mayor de lo que en realidad es, en tanto que si el aire está muy seco, parece que la temperatura es más baja de lo que señala el termómetro. El National Weather Service de Estados Unidos ha diseñado el *índice calorífico*, que se denomina también índice de temperatura-humedad o humidex en algunos países, para describir los efectos combinados de temperatura y humedad. El índice calorífico I es la temperatura del aire que se siente cuando la temperatura real es T y la humedad relativa es H. De este modo, I es una función de T y H y se puede escribir como $I = f(T, H)$. La tabla siguiente de valores de I es parte de una tabla que elaboró el National Weather Service de Estados Unidos.

TABLA 1
Índice calorífico I en función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F)

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Si nos concentramos en la columna resaltada de la tabla, la cual corresponde a la humedad relativa de $H = 70\%$, está considerando el índice calorífico como una función de la variable única T para un valor fijo de H. Escribimos $g(T) = f(T, 70)$. Entonces $g(T)$ describe cómo el índice calorífico I se incrementa cuando la temperatura real T se incrementa cuando la humedad relativa es de 70%. La derivada de g cuando $T = 96$ °F es la razón de cambio de I con respecto a T cuando $T = 96$ °F:

$$g'(96) = \lim_{h \to 0} \frac{g(96 + h) - g(96)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(96 + h, 70) - f(96, 70)}{h}$$

Aproximamos $g'(96)$ usando los valores de la tabla 1 y tomando $h = 2$ y -2:

$$g'(96) \approx \frac{g(98) - g(96)}{2} = \frac{f(98, 70) - f(96, 70)}{2} = \frac{133 - 125}{2} = 4$$

$$g'(96) \approx \frac{g(94) - g(96)}{-2} = \frac{f(94, 70) - f(96, 70)}{-2} = \frac{118 - 125}{-2} = 3.5$$

Al promediar los valores, la derivada $g'(96)$ es aproximadamente 3.75. Esto quiere decir que cuando la temperatura real es de 96 °F y la humedad relativa es 70%, la temperatura aparente (índice calorífico) se eleva casi 3.75 °F ¡por cada grado que aumenta la temperatura real!

Ahora veamos el renglón resaltado de la tabla 1, el cual corresponde a la temperatura fija de $T = 96$ °F. Los números de este renglón son valores de la función $G(H) = f(96, H)$, la cual describe cómo el índice calorífico aumenta cuando la humedad relativa H se incrementa cuando la temperatura real es $T = 96$ °F. La derivada de esta función cuando $H = 70\%$ es la razón de cambio de I con respecto a H cuando $H = 70\%$:

$$G'(70) = \lim_{h \to 0} \frac{G(70 + h) - G(70)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(96, 70 + h) - f(96, 70)}{h}$$

Si hacemos $h = 5$ y -5, aproximamos a $G'(70)$ usando los valores de la tabla:

$$G'(70) \approx \frac{G(75) - G(70)}{5} = \frac{f(96, 75) - f(96, 70)}{5} = \frac{130 - 125}{5} = 1$$

$$G'(70) \approx \frac{G(65) - G(70)}{-5} = \frac{f(96, 65) - f(96, 70)}{-5} = \frac{121 - 125}{-5} = 0.8$$

Al promediar estos valores obtenemos la estimación $G'(70) \approx 0.9$. Esto establece que, cuando la temperatura es de 96 °F y la humedad relativa es de 70%, el índice calorífico se eleva casi 0.9 °F por cada punto porcentual que aumenta la humedad relativa.

En general, si f es una función de dos variables x y y, supongamos que sólo hacemos variar x mientras mantenemos fija a y, digamos $y = b$, donde b es una constante. Entonces estamos considerando en realidad una función de una sola variable x, a saber, $g(x) = f(x, b)$. Si g tiene derivada en a, entonces se denomina **derivada parcial de f con respecto a x en (a, b)** y la denotamos con $f_x(a, b)$. Por consiguiente

1
$$\boxed{f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{donde} \qquad g(x) = f(x, b)}$$

De acuerdo con la definición de derivada, tenemos

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

y entonces la ecuación 1 se transforma en

2
$$\boxed{f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}}$$

De igual manera, la **derivada parcial de f con respecto a y en (a, b)**, denotada por $f_y(a, b)$, se obtiene al mantener fija la variable x ($x = a$) y determinar la derivada ordinaria de b de la función $G(y) = f(a, y)$:

3
$$\boxed{f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}}$$

Con esta notación de derivadas parciales, podemos escribir las razones de cambio del índice calorífico I con respecto a la temperatura real T y humedad relativa H cuando $T = 96$ °F y $H = 70\%$ como sigue:

$$f_T(96, 70) \approx 3.75 \qquad f_H(96, 70) \approx 0.9$$

Si ahora dejamos que el punto (a, b) varíe en las ecuaciones 2 y 3, f_x y f_y se transforman en funciones de dos variables.

4 Si f es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones f_x y f_y, definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Hay muchas otras notaciones para las derivadas parciales. Por ejemplo, en lugar de f_x puede escribir f_1 o $D_1 f$ para indicar la derivación respecto a la *primera* variable, o bien, $\partial f/\partial x$. Pero aquí $\partial f/\partial x$ no se puede interpretar como una razón de diferenciales.

Notaciones para derivadas parciales Si $z = f(x, y)$, escribimos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular derivadas parciales, todo lo que debe hacer es recordar que, según la ecuación 1, la derivada parcial con respecto a x es justamente la derivada *ordinaria* de la función g de una sola variable que se obtiene al mantener fija a y. Por lo tanto, tenemos la regla siguiente.

Regla para determinar las derivadas parciales de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, conservar a y constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x.
2. Para determinar f_y, conservar a x constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y.

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.

SOLUCIÓN Al considerar como constante a y y derivar con respecto a x se obtiene

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

y entonces
$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Si consideramos como constante a x y derivamos con respecto a y entonces

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Interpretaciones de derivadas parciales

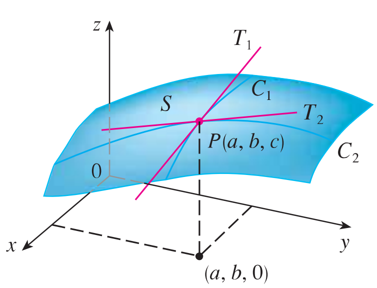


FIGURA 1
Las derivadas parciales de f en (a, b) son las pendientes de las tangentes a C_1 y C_2.

Para dar una interpretación geométrica de las derivadas parciales, recuerde que la ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie S (la gráfica de f). Si $f(a, b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ está situado sobre S. Si hace $y = b$, está enfocando la atención en la curva C_1 en la cual el plano vertical $y = b$ interseca a S. (En otras palabras, C_1 es la traza de S en el plano $y = b$). De igual manera, el plano vertical $x = a$ interseca a S en una curva C_2. Tanto la curva C_1 como C_2 pasan por el punto P (véase figura 1).

Observe que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$, de modo que la pendiente de su tangente T_1 en P es $g'(a) = f_x(a, b)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $G(y) = f(a, y)$, de modo que la pendiente de su tangente T_2 en P es $G'(b) = f_y(a, b)$.

Por lo tanto, las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ se pueden interpretar en forma geométrica como las pendientes de las tangentes en $P(a, b, c)$ a las trazas C_1 y C_2 de S en los planos $y = b$ y $x = a$.

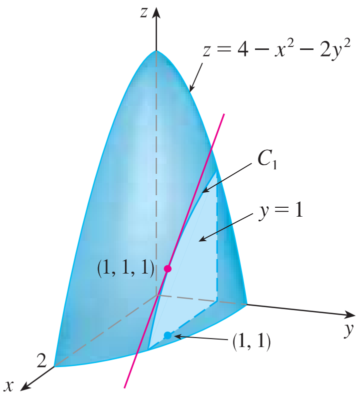


FIGURA 2

Como ya se vio en el caso de la función del índice calorífico, las derivadas parciales también se pueden interpretar como *razones de cambio*. Si $z = f(x, y)$, entonces $\partial z/\partial x$ representa la razón de cambio de z respecto a x cuando y permanece constante. De manera similar, $\partial z/\partial y$ representa la razón de cambio de z respecto a y cuando x es constante.

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$, e interprete estos números como pendientes.

SOLUCIÓN Tenemos

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

La gráfica de f es el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano vertical $y = 1$ lo interseca en la parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Al igual que en el análisis anterior, es C_1 en la figura 2.) La pendiente de la recta tangente de esta parábola en el punto (1, 1, 1) es $f_x(1, 1) = -2$. De la misma manera, la curva C_2 que se forma cuando el plano $x = 1$ interseca al paraboloide es la parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$, y la pendiente de la tangente en (1, 1, 1) es $f_y(1, 1) = -4$ (véase figura 3).

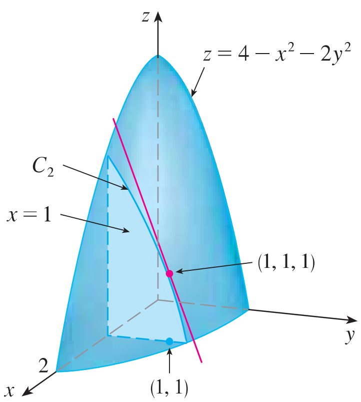


FIGURA 3

La figura 4 se generó mediante computadora y es análoga a la figura 2. En el inciso a) se ilustra el plano $y = 1$ que interseca a la superficie para formar la curva C_1 y en el inciso b) se muestra C_1 y T_1. [Hemos usado las ecuaciones vectoriales $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1 y $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1.] Asimismo, la figura 5 corresponde a la figura 3.

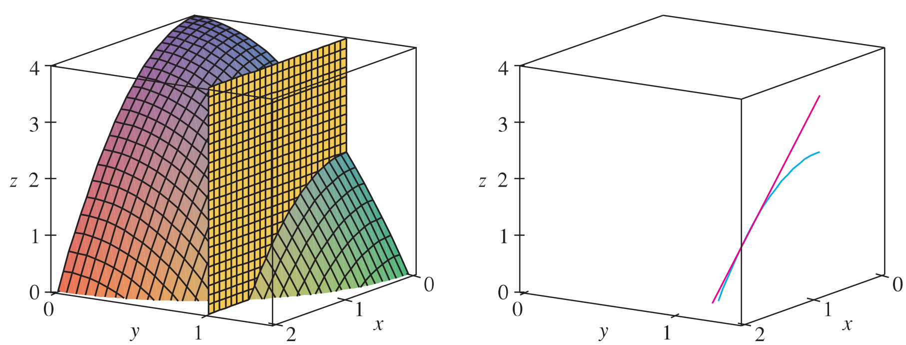


FIGURA 4 a) b)

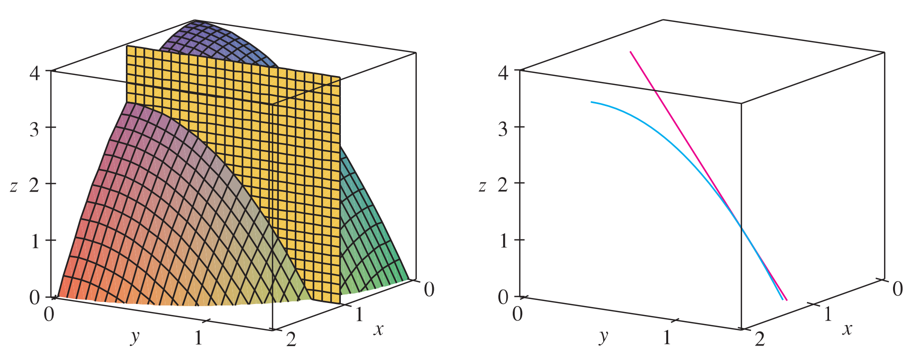


FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN Al aplicar la regla de la cadena para funciones de una variable

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}$$

Algunos sistemas algebraicos computarizados tienen la capacidad de dibujar superficies definidas por ecuaciones implícitas con tres variables. En la figura 6 se presenta una gráfica de la superficie definida por la ecuación del ejemplo 4.

FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si z se define implícitamente como una función de x y y mediante la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUCIÓN Para determinar $\partial z/\partial x$, derivamos en forma implícita con respecto a x, teniendo cuidado de tratar a y como constante:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Resolviendo esta ecuación para $\partial z/\partial x$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

De manera similar, la derivación implícita respecto a y da

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Funciones de más de dos variables

También se pueden definir las derivadas parciales para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x, y y z, entonces su derivada parcial con respecto a x se define como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

y se determina considerando a y y a z como constantes y derivando $f(x, y, z)$ con respecto a x. Si $w = f(x, y, z)$, entonces $f_x = \partial w/\partial x$ se puede interpretar como la razón de cambio de w con respecto a x cuando y y z se mantienen constantes. Pero no podemos hacer una interpretación geométrica porque la gráfica de f se encuentra en un espacio de cuatro dimensiones.

En general, si u es una función de n variables, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, su derivada parcial con respecto a la i-ésima variable x_i es

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

y también escribimos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EJEMPLO 5 Determine f_x, f_y y f_z, si $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUCIÓN Si mantenemos constantes a y y z y derivamos respecto a x, tenemos

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

De manera similar, $\quad f_y = xe^{xy} \ln z \quad$ y $\quad f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$

Derivadas de orden superior

Si f es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de modo que se consideran sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, que se llaman **segundas derivadas parciales** de f. Si $z = f(x, y)$, usamos la notación siguiente:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Por lo tanto, la notación f_{xy} (o bien, $\partial^2 f/\partial y\, \partial x$) significa que primero se deriva respecto a x y después respecto a y, y que al calcular f_{xy} el orden es el inverso.

EJEMPLO 6 Determine las segundas derivadas parciales de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 encontramos que

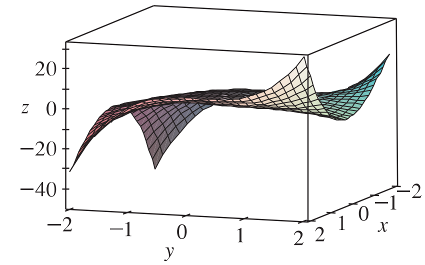
$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Por lo tanto,

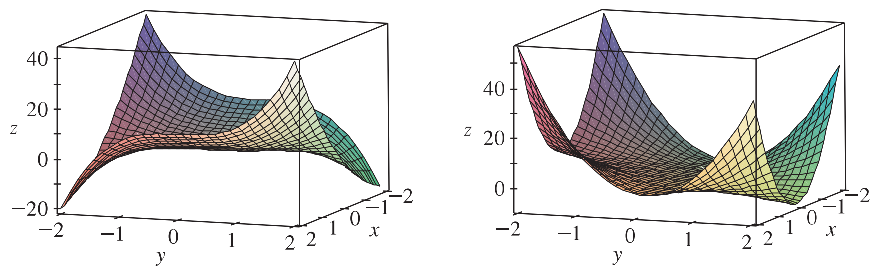
$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

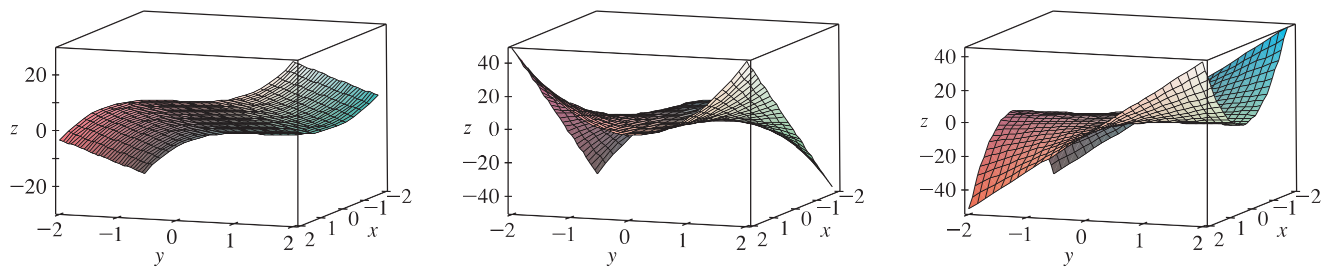
En la figura 7 se ilustra la gráfica de la función f del ejemplo 6 y las gráficas de su primera y segunda derivadas parciales para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Observe que estas gráficas son congruentes con la interpretación de f_x y f_y y las pendientes de las tangentes a las trazas de la gráfica de f. Por ejemplo, la gráfica de f decrece si inicia en $(0, -2)$ y se desplaza en la dirección positiva de x. Esto se refleja en los valores negativos de f_x. Compare las gráficas de f_{yx} y f_{yy}, con la gráfica de f_y para ver las relaciones.



f



f_x f_y



f_{xx} $f_{xy} = f_{yx}$ f_{yy}

FIGURA 7

Observemos que $f_{xy} = f_{yx}$ en el ejemplo 6. Esto no es una coincidencia. Resulta que las derivadas parciales combinadas f_{xy} y f_{yx} son iguales para la mayoría de las funciones que uno encuentra en la práctica. El teorema siguiente, el cual fue descubierto por el matemático francés Alexis Clairaut (1713-1765), presenta las condiciones en las cuales es posible afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$. La demostración se proporciona en el apéndice F.

Teorema de Clairaut Suponga que f está definida sobre un disco D que contiene el punto (a, b). Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas sobre D entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Clairaut

Alexis Clairaut fue un niño prodigio en matemática. Estudió el libro de texto de l'Hospital sobre cálculo cuando tenía 10 años y presentó un trabajo sobre geometría en la Academia Francesa de las Ciencias cuando tenía 13 años. A la edad de 18 publicó *Recherches sur les courbes à double courbure*, que fue el primer tratado sistemático sobre geometría analítica del espacio; entre otras cosas, presentaba el cálculo de curvas tridimensionales.

Las derivadas parciales de orden 3 o superiores también se pueden definir. Por ejemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

y mediante el teorema de Clairaut se puede demostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ si estas funciones son continuas.

V EJEMPLO 7 Calcule f_{xxyz} si $f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f_x &= 3\cos(3x + yz) \\ f_{xx} &= -9\,\text{sen}(3x + yz) \\ f_{xxy} &= -9z\cos(3x + yz) \\ f_{xxyz} &= -9\cos(3x + yz) + 9yz\,\text{sen}(3x + yz) \end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales parciales

En las *ecuaciones diferenciales parciales* que expresan ciertas leyes físicas aparecen derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama **ecuación de Laplace** en honor a Pierre Laplace (1749-1827). Las soluciones de esta ecuación reciben el nombre de **funciones armónicas**, y desempeñan un importante papel en los problemas de conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

EJEMPLO 8 Demuestre que la función $u(x, y) = e^x \,\text{sen}\, y$ es una solución de la ecuación de Laplace.

SOLUCIÓN Primero calculamos las derivadas parciales de segundo orden necesarias:

$$u_x = e^x \,\text{sen}\, y \qquad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \,\text{sen}\, y \qquad u_{yy} = -e^x \,\text{sen}\, y$$

Así que $$u_{xx} + u_{yy} = e^x \,\text{sen}\, y - e^x \,\text{sen}\, y = 0$$

Por lo tanto, u satisface la ecuación de Laplace.

La **ecuación de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

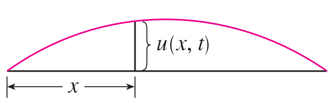


FIGURA 8

describe el movimiento de una onda, que puede ser una ola de mar, una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja por una cuerda que vibra. Por ejemplo, si $u(x, t)$ representa el desplazamiento de una cuerda de violín que está vibrando en el tiempo t y a una distancia x de un extremo de la cuerda (como se ilustra en la figura 8), entonces $u(x, t)$ satisface la ecuación de onda. En este caso la constante a depende de la densidad y de la tensión de la cuerda.

EJEMPLO 9 Compruebe que la función $u(x, t) = \text{sen}(x - at)$ satisface la ecuación de onda.

SOLUCIÓN

$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_t = -a\cos(x - at)$$

$$u_{xx} = -\text{sen}(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2\,\text{sen}(x - at) = a^2 u_{xx}$$

De este modo u satisface la ecuación de onda.

Las ecuaciones diferenciales parciales involucran funciones de tres variables que son muy importantes en ciencia e ingeniería. La ecuación de Laplace en tres dimensiones es

$$\boxed{5} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

y un caso de frecuente aplicación se da en la Geofísica. Si $u(x, y, z)$ representa la intensidad de campo magnético en una posición (x, y, z), entonces satisface la ecuación 5. La intensidad de campo magnético indica la distribución de minerales ricos en hierro y refleja diferentes tipos de rocas y la localización de fallas. La figura 9 muestra un mapa de contorno del campo magnético terrestre registrado desde un avión equipado con un magnetómetro y volando a 200 m por encima de la superficie terrestre. El mapa de contorno es mejorado por un codificador de color de las regiones entre las curvas de nivel.

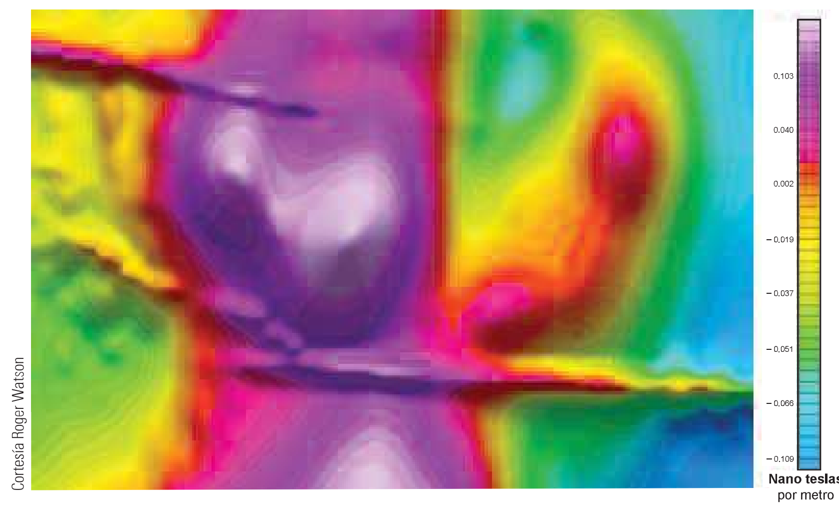


FIGURA 9
Intensidad del campo magnético de la Tierra

La figura 10 muestra un mapa de contorno para la derivada parcial de segundo orden de u en la dirección vertical, u_{zz}. Debido a que los valores de las derivadas parciales u_{xx} y u_{yy} son relativamente fáciles de medir en un mapa del campo magnético, los valores de u_{zz} pueden calcularse a partir de la ecuación de Laplace $\boxed{5}$.

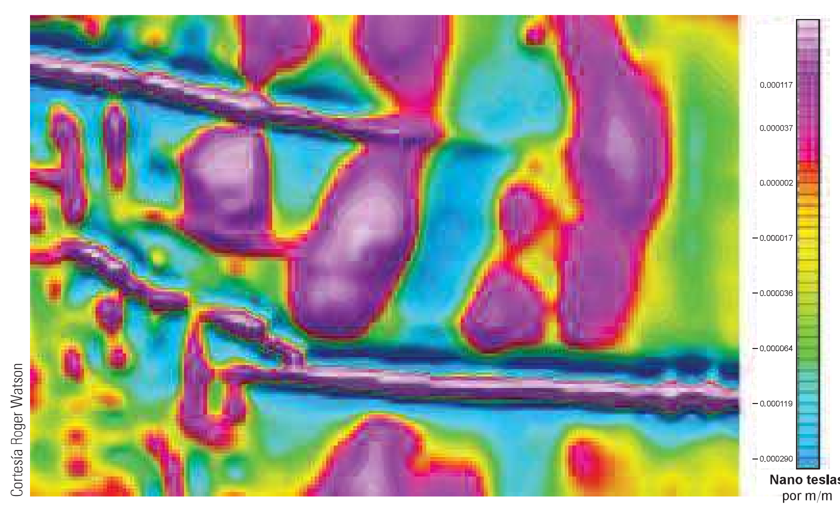


FIGURA 10
Segunda derivada vertical del campo magnético

La función de producción de Cobb-Douglas

En el ejemplo 3 de la sección 14.1, se describe el trabajo de Cobb y Douglas al modelar la producción total P de un sistema económico como una función de la cantidad de mano de obra L y la inversión de capital K. En este caso se utilizan derivadas parciales para demostrar cómo la forma particular del modelo se infiere de ciertas suposiciones que plantearon con respecto a la economía.

Si la función de producción se denota con $P = P(L, K)$, entonces la derivada parcial $\partial P/\partial L$ es la razón a la cual cambia la producción con respecto a la cantidad de mano de obra. Los economistas la llaman producción marginal con respecto a la mano de obra o **productividad marginal de la mano de obra**. De manera similar, la derivada parcial $\partial P/\partial K$ es la razón de cambio de la producción con respecto al capital y se denomina **productividad marginal del capital**. En estos términos las suposiciones que plantearon Cobb y Douglas se pueden formular como sigue:

i) Si la mano de obra o el capital se desvanece, entonces sucede lo mismo con la producción.

ii) La productividad marginal de la mano de obra es proporcional a la cantidad de producción por unidad de mano de obra.

iii) La productividad marginal del capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital.

Debido a que la producción por unidad de mano de obra es P/L, la suposición ii) plantea que

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguna constante α. Si mantenemos K constante ($K = K_0$), entonces esta ecuación diferencial parcial se vuelve una ecuación diferencial ordinaria

$$\boxed{6} \qquad \frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

Si resolvemos esta ecuación diferencial separable mediante los métodos de la sección 9.3 (véase también ejercicio 85), obtenemos

$$\boxed{7} \qquad P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$$

Observemos que la constante C_1 aparece como una función de K_0 porque puede depender del valor de K_0.

Igualmente, la suposición iii) plantea que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

y resolvemos esta ecuación diferencial para tener

$$\boxed{8} \qquad P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta}$$

Al comparar las ecuaciones 7 y 8, obtenemos

$$\boxed{9} \qquad P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

donde b es una constante que es independiente tanto de L como de K. La suposición i) muestra que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Observemos que según la ecuación 9, si la mano de obra y el capital se incrementan un factor m, entonces

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, entonces $P(mL, mK) = mP(L, K)$, lo cual quiere decir que la producción también aumenta un factor de m. Ésta es la razón de que Cobb y Douglas supusieron que $\alpha + \beta = 1$ y, por lo tanto,

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Ésta es la función de producción de Cobb-Douglas que estudiamos en la sección 14.1.

14.3 Ejercicios

1. La temperatura T (en °C) en un lugar del hemisferio norte depende de la longitud x, latitud y, y el tiempo t, de modo que podemos escribir $T = f(x, y, t)$. Mida el tiempo en horas a partir del inicio de enero.

a) ¿Qué significan las derivadas parciales $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ y $\partial T/\partial t$?

b) Honolulu tiene una longitud de 158° W y una latitud de 21° N. Suponga que a las 9:00 AM el primero de enero, los vientos empujan aire caliente hacia el noreste, de modo que el aire del oeste y del sur es caliente y el aire al norte y el este es más frío. ¿Esperaría que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ y $f_t(158, 21, 9)$ sean positivas o negativas? Explique.

2. Al principio de esta sección, estudiamos la función $I = f(T, H)$, donde I es el índice calorífico, T la temperatura y H la hu medad relativa. Mediante la tabla 1 estime $f_T(92, 60)$ y $f_H(92, 60)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

3. El índice de temperatura de sensación W es la temperatura que se percibe cuando la temperatura real es T y la rapidez del viento es v, de modo que $W = f(T, v)$. La tabla siguiente de valores es una parte de la tabla 1 de la sección 14.1.

Rapidez del viento (km/h); Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

a) Estime los valores de $f_T(-15, 30)$ y $f_v(-15, 30)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

b) En general, ¿qué puede decir con respecto a los signos de $\partial W/\partial T$ y $\partial W/\partial v$?

c) ¿Cuál parece ser el valor del límite siguiente?

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. La altura h de una ola en el mar abierto depende de la rapidez v del viento y de la cantidad de tiempo t que el viento ha estado soplando a esa rapidez. En la tabla siguiente se registran valores de la función $h = f(v, t)$ en pies.

Duración (horas); Velocidad del viento (nudos)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

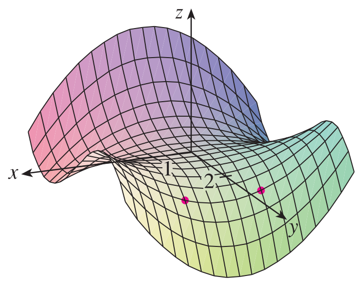
a) ¿Cuáles son los significados de las derivadas parciales $\partial h/\partial v$ y $\partial h/\partial t$?

b) Estime los valores de $f_v(40, 15)$ y $f_t(40, 15)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

c) ¿Cuál parece ser el valor del límite siguiente?

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5-8 Determine los signos de las derivadas parciales de la función f cuya gráfica se ilustra.



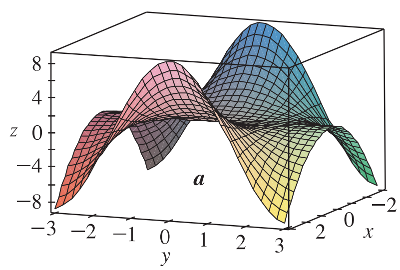
5. a) $f_x(1, 2)$ b) $f_y(1, 2)$

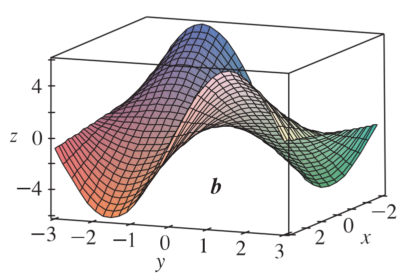
6. a) $f_x(-1, 2)$ b) $f_y(-1, 2)$

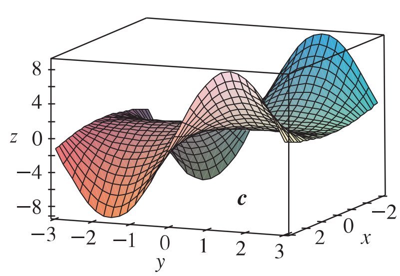
7. a) $f_{xx}(-1, 2)$ b) $f_{yy}(-1, 2)$

8. a) $f_{xy}(1, 2)$ b) $f_{xy}(-1, 2)$

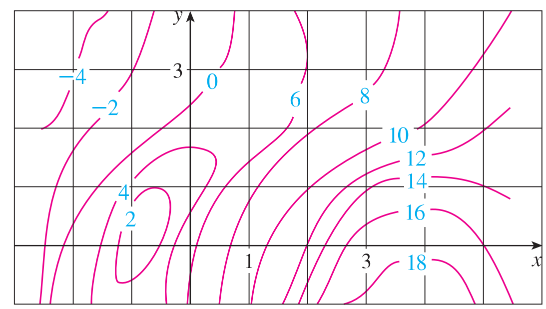
9. Las superficies siguientes, marcadas con a, b y c, son gráficas de una función f y de sus derivadas parciales f_x y f_y. Identifique cada superficie y explique el porqué de su elección.







10. Se presenta un mapa de contorno de una función f. Utilícela para estimar $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.



11. Si $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas a mano o mediante una computadora.

12. Si $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ y $f_y(1, 0)$ e interprete estos valores como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas a mano o mediante una computadora.

13-14 Encuentre f_x y f_y grafique f, f_x y f_y con dominios y desde perspectivas que le permitan ver las relaciones entre ellas.

13. $f(x, y) = x^2y^3$

14. $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$

15-40 Calcule las primeras derivadas parciales de la función.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$

16. $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$

17. $f(x, t) = e^{-t}\cos \pi x$

18. $f(x, t) = \sqrt{x}\,\ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$

20. $z = \tan xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

22. $f(x, y) = \dfrac{x}{(x + y)^2}$

23. $f(x, y) = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$

24. $w = \dfrac{e^v}{u + v^2}$

25. $g(u, v) = (u^2v - v^3)^5$

26. $u(r, \theta) = \operatorname{sen}(r\cos\theta)$

27. $R(p, q) = \tan^{-1}(pq^2)$

28. $f(x, y) = x^y$

29. $F(x, y) = \displaystyle\int_y^x \cos(e^t)\,dt$

30. $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\,dt$

31. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$

32. $f(x, y, z) = x\operatorname{sen}(y - z)$

33. $w = \ln(x + 2y + 3z)$

34. $w = ze^{xyz}$

35. $u = xy\operatorname{sen}^{-1}(yz)$

36. $u = x^{y/z}$

37. $h(x, y, z, t) = x^2y\cos(z/t)$

38. $\phi(x, y, z, t) = \dfrac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$

39. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

40. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

41-44 Determine las derivadas parciales indicadas.

41. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

42. $f(x, y) = \arctan(y/x)$; $f_x(2, 3)$

43. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

44. $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}$; $f_z(0, 0, \pi/4)$

45-46 Use la definición de las derivadas parciales como límites $\boxed{4}$ para determinar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

45. $f(x, y) = xy^2 - x^3y$

46. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

47-50 Mediante derivación implícita determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

47. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

48. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

49. $e^z = xyz$

50. $yz + x \ln y = z^2$

51-52 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

51. a) $z = f(x) + g(y)$ b) $z = f(x + y)$

52. a) $z = f(x)g(y)$ b) $z = f(xy)$
c) $z = f(x/y)$

53-58 Determine las segundas derivadas parciales.

53. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

54. $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

55. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

56. $v = \dfrac{xy}{x - y}$

57. $z = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$

58. $v = e^{xe^y}$

59-62 Compruebe que la conclusión del teorema de Clairaut se cumple, es decir, $u_{xy} = u_{yx}$.

59. $u = x^4y^3 - y^4$

60. $u = e^{xy} \operatorname{sen} y$

61. $u = \cos(x^2y)$

62. $u = \ln(x + 2y)$

63-70 Encuentre la derivada parcial indicada.

63. $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$; f_{xxx}, f_{xyx}

64. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y)$; f_{yxy}

65. $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; f_{xyz}

66. $g(r, s, t) = e^r \operatorname{sen}(st)$; g_{rst}

67. $u = e^{r\theta} \operatorname{sen} \theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\, \partial\theta}$

68. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\, \partial v\, \partial w}$

69. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}$

70. $u = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z^3}$

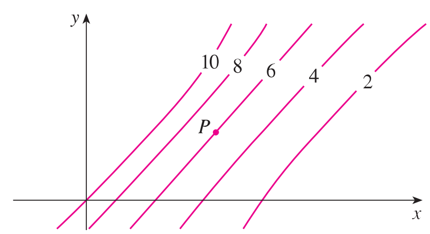
71. Si $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \operatorname{arcsen}(x\sqrt{z})$, obtenga f_{xzy}. [*Sugerencia:* ¿cuál orden de derivación es más fácil?]

72. Si $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$, encuentre g_{xyz}. [*Sugerencia:* utilice un diferente orden de derivación para cada término.]

73. Con la tabla de valores de $f(x, y)$ estime los valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2.2)$ y $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1.8	2.0	2.2
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

74. Se muestran las curvas de nivel para una función f. Determine si las siguientes derivadas parciales son positivas o negativas en el punto P.
a) f_x b) f_y c) f_{xx}
d) f_{xy} e) f_{yy}



75. Compruebe que la función $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ es una solución de *la ecuación de la conducción de calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

76. Determine si cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
a) $u = x^2 + y^2$ b) $u = x^2 - y^2$
c) $u = x^3 + 3xy^2$ d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
e) $u = \operatorname{sen} x \cos hy + \cos x \operatorname{sen} hy$
f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

77. Verifique que la función $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es una solución de la ecuación tridimensional de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

78. Demuestre que cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.
a) $u = \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(akt)$ b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

79. Si f y g son funciones de una sola variable derivables dos veces, demuestre que la función

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda del ejercicio 78.

80. Si $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, donde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

81. Verifique que la función $z = \ln(e^x + e^y)$ es una solución de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

82. La temperatura en un punto (x, y) en una plancha de metal plana está dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, donde T se mide en °C y x, y en metros. Calcule la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en el punto $(2, 1)$ en a) la dirección de x y b) la dirección de y.

83. La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2 y R_3 conectadas en un circuito eléctrico en paralelo está definida por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Calcule $\partial R/\partial R_1$.

84. Demuestre que la función de Cobb-Douglas para la producción $P = bL^\alpha K^\beta$ satisface la ecuación

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

85. Demuestre que la función de Cobb-Douglas para la producción satisface $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Véase ecuación 6.)

86. Cobb y Douglas usaron la ecuación $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$ para modelar la economía americana de 1899 a 1922, donde L es la cantidad de mano de obra y K es la cantidad de capital (ver ejemplo 3 de la sección 14.1).

a) Calcule P_L y P_K.

b) Encuentre la productividad marginal de la mano de obra y la productividad marginal del capital en el año 1920, cuando $L = 194$ y $K = 407$ (comparado con las valores asignados $L = 100$ y $K = 100$ en 1899). Interprete los resultados.

c) En el año 1920, ¿qué producción tendría más beneficio, un incremento de inversión de capital o un incremento en el gasto en mano de obra?

87. La *ecuación de Van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V el volumen y T la temperatura del gas. La constante R es la constante universal del gas y a y b son constantes positivas características de un gas en particular. Calcule $\partial T/\partial P$ y $\partial P/\partial V$.

88. La ley de los gases para una masa fija m de un gas ideal a temperatura T, presión P y volumen V absolutos es $PV = mRT$, donde R es la constante de los gases. Demuestre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

89. En el caso del gas ideal para el ejercicio 88, demuestre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

90. El índice de temperatura de sensación se modela mediante la función

$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (°C) y v es la rapidez del viento (km/h). Cuando $T = -15$ °C y $v = 30$ km/h, ¿cuánto esperaría con certeza usted que cayera la temperatura aparente W si la temperatura real disminuye 1 °C? ¿Y si la rapidez del viento se incrementa 1 km/h?

91. La energía cinética de un cuerpo cuya masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

92. Si a, b y c son los lados de un triángulo, y A, B y C son los ángulos opuestos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$, $\partial A/\partial c$ mediante la derivación implícita de la ley de los cosenos.

93. Le dicen que hay una función f cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$ y $f_y(x, y) = 3x - y$. ¿Debe creerlo?

94. El paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ interseca el plano $x = 1$ en una parábola. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la tangente a esta parábola en el punto $(1, 2, -4)$. Con una computadora grafique el paraboloide, la parábola y la tangente en la misma pantalla.

95. El elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ interseca el plano $y = 2$ en una elipse. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 2)$.

96. En un estudio de penetración del congelamiento se encontró que la temperatura T en el tiempo t (medido en días) a una profundidad x (medida en pies) se puede modelar con la función

$$T(x, t) = T_0 + T_1e^{-\lambda x}\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

donde $\omega = 2\pi/365$ y λ es una constante positiva.

a) Determine $\partial T/\partial x$. ¿Cuál es el significado físico?

b) Determine $\partial T/\partial t$. ¿Cuál es el significado físico?

c) Demuestre que T satisface con la ecuación del calor $T_t = kT_{xx}$ para una cierta constante k.

d) Si $\lambda = 0.2$, $T_0 = 0$ y $T_1 = 10$, mediante una computadora grafique $T(x, t)$.

e) ¿Cuál es el significado físico del término $-\lambda x$ en la expresión sen $(\omega t - \lambda x)$?

97. Aplique el teorema de Clairaut para demostrar que si las derivadas parciales de tercer orden de f son continuas, entonces

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

98. a) ¿Cuántas derivadas parciales de n-ésimo orden tiene una función de dos variables?

b) Si estas derivadas parciales son continuas, ¿cuántas de ellas pueden ser distintas?

c) Responda el inciso a) para el caso de que la función sea de tres variables.

99. Si $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2 y)}$, determine $f_x(1, 0)$. [*Sugerencia:* en lugar de hallar primero $f_x(x, y)$, observe que es más fácil aplicar la ecuación 1 o la ecuación 2.]

100. Si $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

101. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Grafique f mediante una computadora.

b) Encuentre $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ cuando $(x, y) \neq (0, 0)$.

c) Calcule $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ usando las ecuaciones 2 y 3.

d) Demuestre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ y $f_{yx}(0, 0) = 1$.

e) ¿El resultado del inciso d) contradice el teorema de Clairaut? Mediante gráficas de f_{xy} y f_{yx} ilustre su respuesta.

14.4 Planos tangentes y aproximaciones lineales

Una de las ideas más importantes en el cálculo de una variable, es que a medida que se acerca a un punto de la gráfica de una función derivable, la gráfica se vuelve indistinguible desde su tangente y puede aproximarse a la función mediante una función lineal (véase sección 3.10). Ahora se desarrollan ideas similares en tres dimensiones. A medida que se acerca hacia un punto sobre la superficie que es la gráfica de una función derivable de dos variables, la superficie se parece más y más a un plano, su plano tangente, y es posible aproximarse a la función mediante una función lineal de dos variables. También se generaliza la idea de una diferencial a funciones de dos o más variables.

Planos tangentes

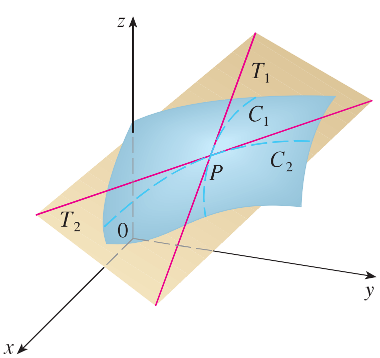


FIGURA 1
El plano tangente contiene las rectas tangentes T_1 y T_2.

Suponga que una superficie S tiene por ecuación a $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre S. Al igual que en la sección anterior, sea C_1 y C_2 las curvas que se obtienen al intersecar los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie S. Entonces, el punto P se encuentra tanto en C_1 como en C_2. Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces, el **plano tangente** a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene las rectas tangentes T_1 y T_2 (véase figura 1).

En la sección 14.6 veremos que si C es cualquier otra curva que queda en la superficie S y pasa por P, entonces su tangente en P también está en el plano tangente. Por lo tanto, podemos pensar que el plano tangente a S en P consiste de todas las tangentes posibles en P a curvas que quedan en S y pasan por P. El plano tangente en P es el plano que más se aproxima a la superficie S cerca del punto P.

Sabemos, por la ecuación 12.5.7, que cualquier plano que pase por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Al dividir esta ecuación entre C y hacer $a = -A/C$ y $b = -B/C$, podemos escribirla en la forma

1 $$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Si la ecuación 1 representa el plano tangente en P, entonces su intersección con el plano $y = y_0$ debe ser la recta tangente T_1. Al hacer $y = y_0$ en la ecuación 1 obtenemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad \text{donde } \; y = y_0$$

e identificamos estas expresiones como la ecuación de una recta (en la forma punto-pendiente) con pendiente a. Pero de acuerdo con la sección 14.3, sabemos que la pendiente de la recta tangente T_1 es $f_x(x_0, y_0)$. Por lo tanto, $a = f_x(x_0, y_0)$.

De manera similar, al hacer $x = x_0$ en la ecuación 1, $z - z_0 = b(y - y_0)$, la cual debe representar a la recta tangente T_2, de modo que $b = f_y(x_0, y_0)$.

Observe la similitud entre las ecuaciones del plano tangente y de una recta tangente:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$\boxed{2}$ Suponga que las derivadas parciales de f son continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

V EJEMPLO 1 Calcule el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Entonces

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Entonces $\boxed{2}$ da la ecuación del plano tangente en $(1, 1, 3)$ como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

o bien,

$$z = 4x + 2y - 3$$

En la figura 2a) se ilustra el paraboloide elíptico y su plano tangente en $(1, 1, 3)$ determinado en el ejemplo 1. Los incisos b) y c) se acercan al punto $(1, 1, 3)$ restringiendo el dominio de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que a medida que se acerca, parece más plana la gráfica y más se asemeja a su plano tangente.

TEC En Visual 14.4 se pueden ver imágenes animadas de las figuras 2 y 3.

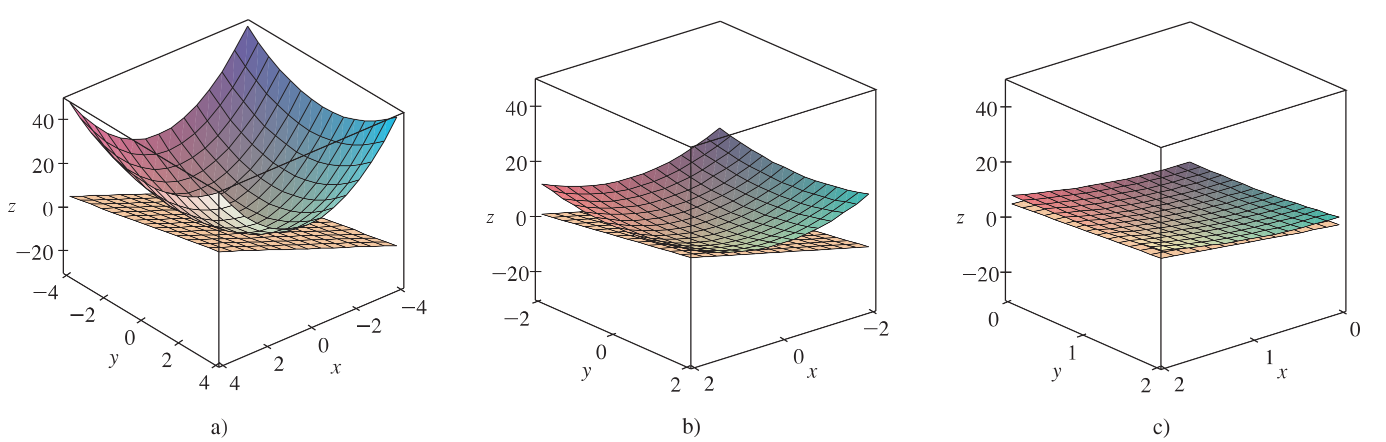


FIGURA 2 El paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir con su plano tangente a medida que se acerca a $(1, 1, 3)$.

En la figura 3 se comprueba esta impresión al acercarse al punto (1, 1) sobre un mapa de contorno de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que a medida que nos acercamos, las curvas de nivel se parecen más a rectas paralelas con igual separación, lo cual es característico de un plano.

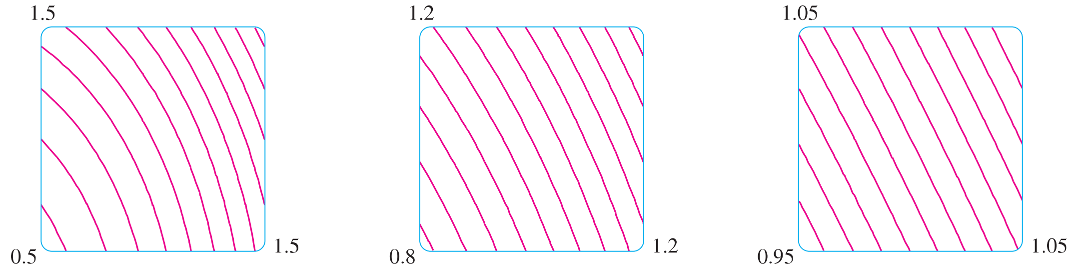


FIGURA 3
Acercamiento a (1, 1) en un mapa de contorno de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Aproximaciones lineales

En el ejemplo 1 encontramos que una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3) es $z = 4x + 2y - 3$. Por lo tanto, en vista de la evidencia de las figuras 2 y 3, la función lineal de dos variables

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

es una buena aproximación a $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de (1, 1). La función L se conoce como *linealización* de f en (1, 1) y la aproximación

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

recibe el nombre de *aproximación lineal*, o bien, *aproximación del plano tangente* de f en (1, 1).

Por ejemplo, en el punto (1.1, 0.95) la aproximación lineal da

$$f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$$

que es muy cercana al valor verdadero de $f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$. Pero si tomamos un punto alejado de (1, 1), tal como (2, 3), ya no conseguimos una buena aproximación. En efecto, $L(2, 3) = 11$ y $f(2, 3) = 17$.

En general, sabemos a partir de $\boxed{2}$ que una ecuación del plano tangente a la gráfica de una función f de dos variables en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La función lineal cuya gráfica es este plano tangente, a saber,

$$\boxed{3} \qquad L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **linealización** de f en (a, b) y la aproximación

$$\boxed{4} \qquad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **aproximación lineal** o **aproximación del plano tangente** de f en (a, b).

Ya hemos definido planos tangentes para superficies $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas. ¿Qué sucede si f_x y f_y no son continuas? En la figura 4 se ilustra tal función; su ecuación es

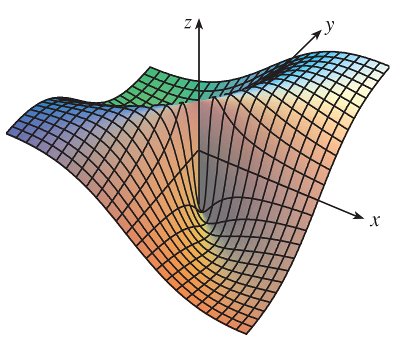


FIGURA 4
$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Podemos comprobar (véase ejercicio 46) que existen sus derivadas parciales en el origen y, de hecho, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$, pero f_x y f_y no son continuas. La aproximación lineal sería $(x, y) \approx 0$, pero $f(x, y) = \frac{1}{2}$ en todos los puntos sobre la recta $y = x$. De este modo una función de dos variables se puede comportar erráticamente aun cuando ambas derivadas parciales existan. Para evitar dicho comportamiento, se plantea la idea de una función diferenciable de dos variables.

Recuerde que para una función de una variable, $y = f(x)$, si x pasa de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

En el capítulo 3 se demostró que si f es derivable en a, entonces

Ésta es la ecuación 3.4.7.

$$\boxed{5} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x \to 0$$

Ahora consideremos una función de dos variables, $z = f(x, y)$, y supongamos que x cambia de a a $a + \Delta x$ y que y pasa de b a $b + \Delta y$. Entonces el **incremento** correspondiente de z es

$$\boxed{6} \qquad \Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Por consiguiente, el incremento Δz representa el cambio del valor de f cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Por analogía con $\boxed{5}$ se define la diferenciabilidad de una función de dos variables como sigue.

$\boxed{7}$ **Definición** Si $z = f(x, y)$, entonces f es **diferenciable** en (a, b) si Δz se puede expresar en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

La definición 7 establece que una función diferenciable es una para la cual la aproximación lineal $\boxed{4}$ es una buena aproximación cuando (x, y) está cerca de (a, b). En otras palabras, el plano tangente se aproxima a la gráfica de f muy cerca al punto de tangencia.

Algunas veces es difícil aplicar directamente la definición 7 para comprobar la diferenciabilidad de una función, pero el teorema siguiente proporciona una condición suficiente y práctica para la diferenciabilidad.

El teorema 8 se demuestra en el apéndice F.

$\boxed{8}$ **Teorema** Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

En la figura 5 se ilustran las gráficas de la función f y su linealización L del ejemplo 2.

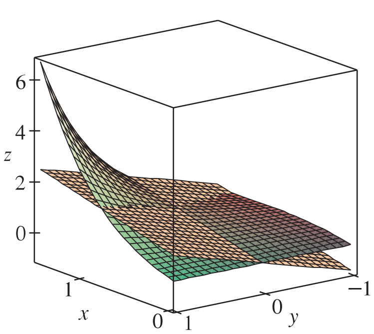


FIGURA 5

V EJEMPLO 2 Demuestre que $f(x, y) = xe^{xy}$ es diferenciable en $(1, 0)$ y determine su linealización ahí. Luego úsela para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$

$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Tanto f_x como f_y son funciones continuas, de modo que f es diferenciable según el teorema 8. La linealización es

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0)$$

$$= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y$$

La aproximación lineal correspondiente es

$$xe^{xy} \approx x + y$$

de modo que $$f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$$

Compare lo anterior con el valor real de $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$.

EJEMPLO 3 Al inicio de la sección 14.3, estudiamos el índice calorífico (temperatura percibida) I como una función de la temperatura real T y la humedad relativa H y se presentó la tabla siguiente de valores del National Weather Service.

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F)

$T \backslash H$	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Calcule una aproximación lineal para el índice calorífico $I = f(T, H)$ cuando T está cerca de 96 °F y H está cerca del 70%. Mediante ella estime el índice calorífico cuando la temperatura es de 97 °F y la humedad relativa es 72%.

SOLUCIÓN En la tabla se ve que $f(96, 70) = 125$. En la sección 14.3 usamos los valores de la tabla para estimar que $f_T(96, 70) \approx 3.75$ y $f_H(96, 70) \approx 0.9$. (Véanse páginas 901 y 902.) Entonces, la aproximación lineal es

$$\begin{aligned} f(T, H) &\approx f(96, 70) + f_T(96, 70)(T - 96) + f_H(96, 70)(H - 70) \\ &\approx 125 + 3.75(T - 96) + 0.9(H - 70) \end{aligned}$$

En particular,

$$f(97, 72) \approx 125 + 3.75(1) + 0.9(2) = 130.55$$

Por lo tanto, cuando $T = 97$ °F y $H = 72\%$, el índice calorífico es

$$I \approx 131 \text{ °F}$$

Diferenciales

En el caso de una función derivable de una variable, $y = f(x)$, definimos la diferencial dx como una variable independiente; es decir, dx puede tener el valor de cualquier número real. La diferencial de y se define entonces como

$$\boxed{9} \qquad dy = f'(x)dx$$

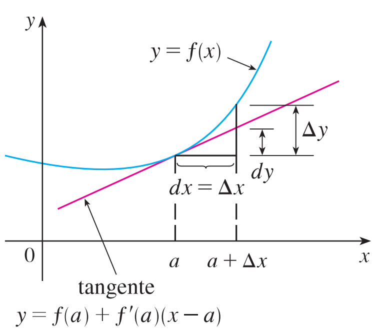


FIGURA 6

(Véase sección 3.10.) En la figura 6 se muestra la relación entre el incremento Δy y la diferencial dy: Δy representa el cambio en altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa el cambio en altura de la tangente cuando x cambia una cantidad $dx = \Delta x$.

En el caso de una función diferenciable de dos variables, $z = f(x, y)$, definimos las **diferenciales** dx y dy como variables independientes; es decir, pueden tomar cualquier valor. Entonces, la **diferencial** dz, también conocida como **diferencial total**, se define como

10
$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

(Compare con la ecuación 9.) Algunas veces se usa la notación df en lugar de dz.

Si tomamos $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$ de la ecuación 10, entonces la diferencial de z es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

De este modo, en la notación de diferenciales, la aproximación lineal $\boxed{4}$ se puede escribir como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

La figura 7 es el equivalente tridimensional de la figura 6 y en ella se muestra la interpretación geométrica de la diferencial dz y del incremento Δz: dz representa el cambio en altura del plano tangente, y Δz representa el cambio en la altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

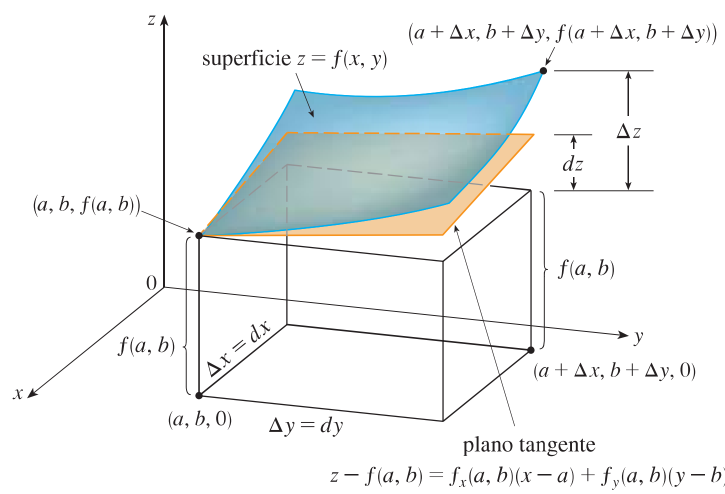


FIGURA 7

En el ejemplo 4, dz está cerca de Δz porque el plano tangente es una buena aproximación a la superficie $z = x^2 + 3xy - y^2$ cerca de (2, 3, 13). (Véase figura 8.)

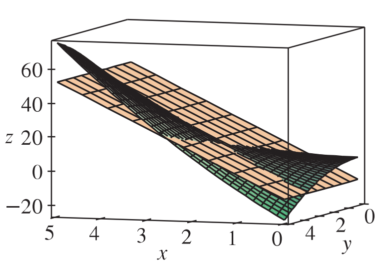


FIGURA 8

V EJEMPLO 4

a) Si $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine la diferencial dz.

b) Si x cambia de 2 a 2.05 y y pasa de 3 a 2.96, compare los valores de Δz y dz.

SOLUCIÓN

a) La definición 10 da

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

b) Si hacemos $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$ y $dy = \Delta y = -0.04$, obtenemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

El incremento de z es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3)\\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]\\ &= 0.6449\end{aligned}$$

Observemos que $\Delta z \approx dz$ pero dz es más fácil de calcular.

EJEMPLO 5 El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de 0.1 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el volumen calculado del cono.

SOLUCIÓN El volumen V de un cono de radio en la base r y altura h es $V = \pi r^2 h/3$. De modo que la diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = \frac{2\pi rh}{3}\,dr + \frac{\pi r^2}{3}\,dh$$

Puesto que cada error es de 0.1 cm como máximo, tenemos $|\Delta r| \leqslant 0.1$, $|\Delta h| \leqslant 0.1$. Para estimar el error más grande en el volumen, tomamos el error más grande en la medición de r y de h, entonces $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$ junto con $r = 10$, $h = 25$. Esto da

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Por lo tanto, el error máximo en el volumen calculado es de casi 20π cm^3 ≈ 63 cm^3.

Funciones de tres o más variables

Se pueden definir de manera similar las aproximaciones lineales, la diferenciabilidad y las diferenciales para funciones de más de dos variables. Una función diferenciable se define como una expresión similar a la definición 7. Para tales funciones la **aproximación lineal** es

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

y la linealización $L(x, y, z)$ es el segundo miembro de esta expresión. Si $w = f(x, y, z)$, entonces el **incremento** de w es

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

La **diferencial** dw se define en función de las diferenciales de dx, dy y dz de las variables independientes

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

EJEMPLO 6 Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 cm, y cada medida no difiere 0.2 cm del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.

SOLUCIÓN Si las dimensiones de la caja son x, y y z, entonces su volumen es $V = xyz$ por lo que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Sabemos que $|\Delta x| \leqslant 0.2$, $|\Delta y| \leqslant 0.2$ y $|\Delta z| \leqslant 0.2$. Por lo tanto, para estimar el error más grande en el volumen, utilizamos $dx = 0.2$, $dy = 0.2$ y $dz = 0.2$ junto con $x = 75$, $y = 60$ y $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2) = 1980$$

Por consiguiente, un error de sólo 0.2 cm al medir cada una de las dimensiones podría llevar a un error de ¡tanto como 1980 cm^3 en el volumen calculado! Esto parecería un gran error, pero sólo es alrededor de 1% del volumen de la caja.

14.4 Ejercicios

1-6 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto específico.

1. $z = 3y^2 - 2x^2 + x$, $(2, -1, -3)$

2. $z = 3(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 + 7$, $(2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy}$, $(1, 1, 1)$

4. $z = xe^{xy}$, $(2, 0, 2)$

5. $z = x \operatorname{sen}(x + y)$, $(-1, 1, 0)$

6. $z = \ln(x - 2y)$, $(3, 1, 0)$

7-8 Grafique la superficie y el plano tangente en el punto dado. Elija el dominio y el ángulo desde donde obtenga una buena vista de la superficie y del plano tangente. Luego efectúe un acercamiento hasta donde la superficie y el plano tangente se vuelven indistinguibles.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$

8. $z = \arctan(xy^2)$, $(1, 1, \pi/4)$

SAC **9-10** Grafique f y su plano tangente en el punto dado. (Use un sistema computarizado de álgebra para calcular las derivadas parciales y para graficar la superficie y su plano tangente.) Luego efectúe un acercamiento hasta donde la superficie y el plano tangente se vuelven indistinguibles.

9. $f(x, y) = \dfrac{xy \operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}$, $(1, 1, 0)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy})$, $(1, 1, 3e^{-0.1})$

11-16 Explique por qué la función es diferenciable en el punto dado. Luego determine la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.

11. $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5)$, $(2, 3)$

12. $f(x, y) = x^3y^4$, $(1, 1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$, $(2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $(3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy} \cos y$, $(\pi, 0)$

16. $f(x, y) = y + \operatorname{sen}(x/y)$, $(0, 3)$

17-18 Verifique la aproximación lineal en $(0, 0)$.

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$ **18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Dado que f es una función diferenciable con $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$, y $f_y(2, 5) = -1$, utilice una aproximación lineal para estimar $f(2.2, 4.9)$.

20. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y) = 1 - xy \cos \pi y$ en $(1, 1)$ y utilícela para aproximar $f(1.02, 0.97)$. Grafique f y su plano tangente.

21. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $(3, 2, 6)$ y con ella aproxime el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

22. La altura h de una ola en el mar abierto, depende de la rapidez v del viento y del tiempo t en que ha estado soplando el aire a esa rapidez. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en la tabla siguiente. Con ayuda de la tabla, determine una aproximación lineal a la función de la altura de la ola cuando v está cerca de 40 nudos y t es casi de 20 horas. Luego estime las alturas de las olas cuando el viento ha estado soplando durante 24 h a 43 nudos.

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

23. Mediante la tabla del ejemplo 3, determine una aproximación lineal para la función del índice calorífico cuando la temperatura se acerca a 94 °F y la humedad relativa es de casi 80%. Luego estime el índice calorífico cuando la temperatura es de 95 °F y la humedad relativa es de 78%.

24. El índice de temperatura de sensación W es la temperatura que se percibe cuando la temperatura real es T y la rapidez del viento v, de modo que $W = f(T, v)$. La tabla de valores siguiente es tan sólo una parte de la tabla 1 de la sección 14.1. Con esta tabla determine una aproximación lineal a la función del índice de temperatura de sensación cuando T es casi de -15 °C y v es casi de 50 km/h. Después estime este mismo índice cuando la temperatura es -17 °C y la rapidez del viento es de 55 km/h.

Velocidad del viento (km/h)

Temperatura real (°C) — T \ v	20	30	40	50	60	70
-10	-18	-20	-21	-22	-23	-23
-15	-24	-26	-27	-29	-30	-30
-20	-30	-33	-34	-35	-36	-37
-25	-37	-39	-41	-42	-43	-44

25-30 Determine la diferencial de la función.

25. $z = e^{-2x}\cos 2\pi t$

26. $u = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos\gamma$

30. $L = xze^{-y^2-z^2}$

31. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x, y) cambia de $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$, compare los valores de Δz y dz.

32. Si $z = x^2 - xy + 3y^2$ y (x, y) cambia de $(3, -1)$ a $(2.96, -0.95)$, compare los valores de Δz y dz.

33. El largo y el ancho de un rectángulo miden 30 cm y 24 cm respectivamente, con un error máximo en la medición de 0.1 cm en cada una de las dimensiones. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo.

34. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide 10 cm de altura y 4 cm de diámetro. El metal para la parte superior y el fondo es de 0.1 cm de grueso y el metal de los lados tiene 0.05 cm de espesor.

35. Use diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada de estaño cuyo diámetro es 8 cm y altura de 12 cm si el estaño tiene 0.04 cm de espesor.

36. El índice de temperatura de sensación está modelado por la función

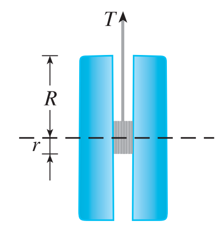
$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (en °C) y v es la rapidez del viento (en km/h). La rapidez del viento es medida como 26 km/h, con un posible error de ± 2 km/h y la temperatura es medida como -11 °C, con un posible error de ± 1 °C. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de W debido a errores en la medición de T y v.

37. La tensión T en la cuerda del yo-yo en la figura es

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

donde m es la masa del yo-yo y g es la aceleración debida a la gravedad. Utilice diferenciales para estimar el cambio en la tensión si R es incrementada de 3 cm a 3.1 cm y r es incrementada de 0.7 cm a 0.8 cm ¿La tensión crece o decrece?



38. La presión, volumen y temperatura de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8.31T$, donde P se mide en kilopascales, V en litros y T en kelvin. Mediante diferenciales determine el cambio aproximado en la presión si el volumen pasa de 12 litros a 12.3 litros y la temperatura disminuye de 310 K a 305 K.

39. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si la resistencia se mide en ohms como $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ y $R_3 = 50\ \Omega$ con un posible error de 0.5% en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

40. Cuatro números positivos, cada uno menor de 50, se redondean a la primera cifra decimal, y luego se multiplican todos. Mediante diferenciales, estime el error máximo posible en el producto calculado que podría resultar por el redondeo.

41. Un modelo para el área superficial de un cuerpo humano está dado por $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$, donde w es el peso (en libras), h es la estatura (en pulgadas), y S se mide en pies cuadrados. Si los errores en la medición de w y h son a lo sumo un 2%, use diferenciales para estimar el máximo error porcentual en el área superficial calculada.

42. Suponga que necesitamos conocer una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 1, 3)$. No tenemos una ecuación para S pero sabemos que las curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t,\ 1 - t^2,\ 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2,\ 2u^3 - 1,\ 2u + 1 \rangle$$

se encuentran ambas en S. Encuentre una ecuación del plano tangente en P.

43-44 Demuestre que la función es diferenciable determinando los valores de ε_1 y ε_2 que satisfacen la definición 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Demuestre que si f es una función de dos variables que es diferenciable en (a, b), entonces f es continua en (a, b).
Sugerencia: demuestre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. a) La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se grafica en la figura 4. Demuestre que existen tanto $f_x(0, 0)$ como $f_y(0, 0)$, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$. [*Sugerencia:* use el resultado del ejercicio 45.]

b) Explique por qué f_x y f_y no son continuas en $(0, 0)$.

14.5 Regla de la cadena

Recuerde que la regla de la cadena para funciones de una variable da la regla para derivar una función compuesta: si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde f y g son funciones derivables, entonces y es indirectamente una función derivable de t y

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión (teorema 2) se relaciona con el caso donde $z = f(x, y)$ y cada variable x y y es a su vez una función de la variable t. Esto significa que z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$, y la regla de la cadena da una fórmula para derivar z como una función de t. Supongamos que f es derivable (definición 14.4.7). Recuerde que éste es el caso cuando f_x y f_y son continuas (teorema 14.4.8).

$\boxed{2}$ **Regla de la cadena (caso 1)** Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de t. Entonces z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

DEMOSTRACIÓN Un cambio de Δt en t produce cambios de Δx en x y Δy en y. Éstos, a su vez, producen un cambio de Δz en z, y de acuerdo con la definición de 14.4.7 tenemos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. [Si las funciones ε_1 y ε_2 no están definidas en $(0, 0)$, podemos definir que son 0 allí.] Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre Δt, tenemos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si ahora hacemos $\Delta t \to 0$, $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$ porque g es derivable y, por lo tanto, continua. De igual manera, $\Delta y \to 0$. A su vez, esto significa que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ de modo que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2\right) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

Como se escribe a menudo $\partial z/\partial x$ en lugar de $\partial f/\partial x$, podemos volver a escribir la regla de la cadena en la forma

Observe la similitud con la definición de la diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}}$$

EJEMPLO 1 Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \operatorname{sen} 2t$ y $y = \cos t$, determine dz/dt cuando $t = 0$.

SOLUCIÓN La regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t)\end{aligned}$$

No es necesario escribir las expresiones para x y y en términos de t. Simplemente observe que cuando $t = 0$ tenemos $x = \operatorname{sen} 0 = 0$ y $y = \cos 0 = 1$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\operatorname{sen} 0) = 6$$

La derivada del ejemplo 1 se puede interpretar como la razón de cambio de z con respecto a t cuando el punto (x, y) se desplaza por la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$ (véase figura 1). En particular, cuando $t = 0$, el punto (x, y) es $(0, 1)$ y $dz/dt = 6$ es la razón del incremento cuando uno se desplaza por la curva C que pasa por el punto $(0, 1)$. Si, por ejemplo, $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representa la temperatura en el punto (x, y), entonces la función compuesta $z = T(\operatorname{sen} 2t, \cos t)$ representa la temperatura en los puntos sobre C y la derivada dz/dt representa la razón a la cual la temperatura cambia a lo largo de C.

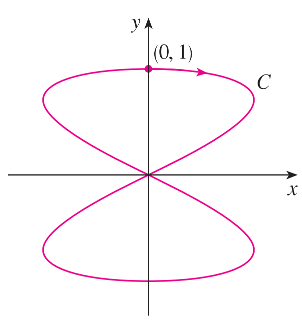


FIGURA 1
La curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$

V EJEMPLO 2 La presión P, en kilopascales, el volumen V (en litros) y la temperatura T (en kelvin), de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8.31T$. Determine la razón a la cual la presión cambia cuando la temperatura es de 300 K y se incrementa a razón de 0.1 K/s y el volumen es de 100 L y se incrementa a razón de 0.2 L/s.

SOLUCIÓN Si t representa el tiempo que transcurre en segundos, entonces en el instante dado $T = 300$, $dT/dt = 0.1$, $V = 100$, $dV/dt = 0.2$. Puesto que

$$P = 8.31 \frac{T}{V}$$

con la regla de la cadena

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{8.31}{100}(0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2}(0.2) = -0.04155$$

La presión disminuye a razón de casi 0.042 kPa/s.

Ahora consideremos la situación en donde $z = f(x, y)$ pero cada x y y es una función de dos variables s y t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces z es indirectamente una función de s y de t y deseamos hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. Recuerde que al calcular $\partial z/\partial t$ mantenemos fija a s y calculamos la derivada ordinaria de z con respecto a t. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema 2 para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Un razonamiento similar se efectúa para $\partial z/\partial s$ y así se demuestra la versión siguiente de la regla de la cadena.

3 Regla de la cadena (caso 2) Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EJEMPLO 3 Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

SOLUCIÓN Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2}\operatorname{sen}(s^2t) + s^2e^{st^2}\cos(s^2t)$$

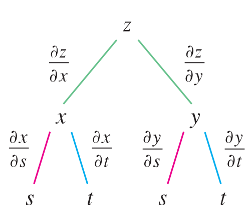


FIGURA 2

El caso 2 de la regla de la cadena contiene tres tipos de variables: s y t son variables **independientes**, x y y se llaman variables **intermedias** y z es la variable **dependiente**. Observe que el teorema 3 tiene un término para cada variable intermedia, y cada uno de estos términos es similar a la regla de la cadena unidimensional de la ecuación 1.

Para recordar la regla de la cadena, es útil dibujar el **diagrama de árbol** de la figura 2. Dibujamos ramas desde la variable dependiente z a las variables intermedias x y y para indicar que z es una función de x y y. Luego dibujamos ramas desde x y y a las variables independientes s y t. En cada rama escribimos la derivada parcial correspondiente. Para determinar $\partial z/\partial s$ calculamos el producto de las derivadas parciales en cada trayectoria desde z hasta s y luego sumamos los productos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

De la misma manera determinamos $\partial z/\partial t$ mediante las trayectorias de z a t.

Ahora consideramos la situación general en la cual una variable dependiente u es una función de n variables intermedias $x_1, \ldots, x_n$, cada una de las cuales, a su vez, es una función de m variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que hay n términos, uno para cada variable intermedia. La demostración es similar a la del caso 1.

$\boxed{4}$ **Regla de la cadena (versión general)** Supongamos que u es una función derivable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

V EJEMPLO 4 Exprese la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.

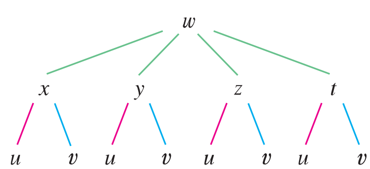


FIGURA 3

SOLUCIÓN Utilice el teorema 4 con $n = 4$ y $m = 2$. La figura 3 muestra el diagrama de árbol. Aunque no ha escrito las derivadas en las ramas, se sobreentiende que si una rama va desde y a u, entonces la derivada parcial para esa rama es $\partial y/\partial u$. Con la ayuda del diagrama de árbol, podemos escribir las expresiones necesarias:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

V EJEMPLO 5 Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, y $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine el valor de $\partial u/\partial s$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

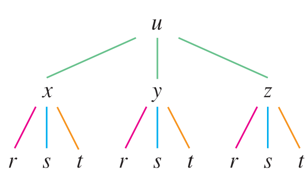


FIGURA 4

SOLUCIÓN Con la ayuda del diagrama de árbol de la figura 4, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$, y $t = 0$, tenemos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

EJEMPLO 6 Si $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ y f es derivable, demuestre que g satisface la ecuación

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUCIÓN Sea $x = s^2 - t^2$ y $y = t^2 - s^2$. Entonces, $g(s, t) = f(x, y)$ y la regla de la cadena dan

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Por lo tanto,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

EJEMPLO 7 Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, calcule a) $\partial z/\partial r$ y b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUCIÓN

a) La regla de la cadena da

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

b) Al aplicar la regla del producto a la expresión en el inciso a) obtenemos

$$\boxed{5}\quad \begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Pero al aplicar la regla de la cadena una vez más (véase figura 5), llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

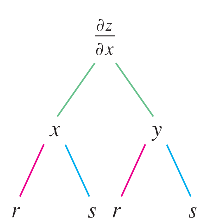


FIGURA 5

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 5 y usar la igualdad de las derivadas de segundo orden combinadas, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Derivación implícita

La regla de la cadena se puede aplicar para tener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita que se empezó a tratar en las secciones 3.5 y 14.3. Suponemos que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función derivable de x, es decir, $y = f(x)$, donde $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f. Si F

es derivable, aplicamos el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $dx/dx = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx y obtener

6

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

Para deducir esta ecuación, suponemos que $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función de x. El **teorema de la función implícita**, que se demuestra en cálculo avanzado, proporciona condiciones en las cuales es válida esta suposición. Establece que si F se define sobre un disco que contiene (a, b), donde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$, y F_x y F_y son continuas sobre el disco, entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función de x cerca del punto (a, b) y la derivada de esta función está dada por la ecuación 6.

EJEMPLO 8 Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUCIÓN La ecuación dada se puede escribir como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

de modo que la ecuación 6 da como resultado

La solución del ejemplo 8 se debe comparar con la del ejemplo 2 de la sección 3.5.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Ahora se supone que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en el dominio f. Si F y f son derivables, entonces usamos la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

así que esta ecuación se transforma en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ y obtenemos la primera fórmula de las ecuaciones 7 de la página 930. La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene de una manera parecida.

7
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Una vez más, una versión del **teorema de la función implícita** da condiciones en las cuales la suposición es válida. Si F está definida dentro de una esfera que contiene (a, b, c), donde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, y F_x, F_y y F_z son continuas dentro de la esfera, entonces la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función de x y y cerca del punto (a, b, c) y esta función es derivable, con derivadas parciales dadas por $\boxed{7}$.

EJEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUCIÓN Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Entonces, de acuerdo con las ecuaciones 7, tenemos

La solución del ejemplo 9 se debe comparar con la del ejemplo 4 de la sección 14.3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

14.5 Ejercicios

1-6 Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt o dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = e^t$

2. $z = \cos(x + 4y), \quad x = 5t^4, \quad y = 1/t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$

4. $z = \tan^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad z = \tan t$

7-12 Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s \operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s$

11. $z = e^r \cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \tan(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$

13. Si $z = f(x, y)$, donde f es derivable,

$$\begin{array}{ll} x = g(t) & y = h(t) \\ g(3) = 2 & h(3) = 7 \\ g'(3) = 5 & h'(3) = -4 \\ f_x(2, 7) = 6 & f_y(2, 7) = -8 \end{array}$$

determine dz/dt cuando $t = 3$.

14. Sea $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, donde F, u y v son derivables,

$$\begin{array}{ll} u(1, 0) = 2 & v(1, 0) = 3 \\ u_s(1, 0) = -2 & v_s(1, 0) = 5 \\ u_t(1, 0) = 6 & v_t(1, 0) = 4 \\ F_u(2, 3) = -1 & F_v(2, 3) = 10 \end{array}$$

Determine $W_s(1, 0)$ y $W_t(1, 0)$.

15. Suponga que f es una función derivable de x y y, y que $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Mediante la tabla de valores calcule $g_u(0, 0)$ y $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponga que f es una función derivable de x y y, y que $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Mediante la tabla de valores del ejercicio 15 calcule $g_r(1, 2)$ y $g_s(1, 2)$.

1. Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

17-20 Mediante un diagrama de árbol, escriba la regla de la cadena para el caso dado. Suponga que todas las funciones son derivables.

17. $u = f(x, y)$, donde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, donde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, donde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, donde $u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21-26 Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se indican.

21. $z = x^4 + x^2y$, $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$;
$\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$ donde $s = 4$, $t = 2$, $u = 1$

22. $T = \dfrac{v}{2u + v}$, $u = pq\sqrt{r}$, $v = p\sqrt{q}\,r$;
$\dfrac{\partial T}{\partial p}, \dfrac{\partial T}{\partial q}, \dfrac{\partial T}{\partial r}$ donde $p = 2$, $q = 1$, $r = 4$

23. $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $z = r\theta$;
$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ donde $r = 2$, $\theta = \pi/2$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = xe^y$, $v = ye^x$, $w = e^{xy}$;
$\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ donde $x = 0$, $y = 2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}$, $p = u + vw$, $q = v + uw$, $r = w + uv$;
$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ donde $u = 2$, $v = 3$, $w = 4$

26. $u = xe^{ty}$, $x = \alpha^2\beta$, $y = \beta^2\gamma$, $t = \gamma^2\alpha$;
$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}$ donde $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

27-30 Aplique la ecuación 6 para encontrar dy/dx.

27. $y\cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \operatorname{sen} y$

29. $\tan^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

30. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

31-34 Con las ecuaciones 7 halle $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x\ln y = z^2$

35. La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados celsius. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y se miden en centímetros. La función temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 3 segundos?

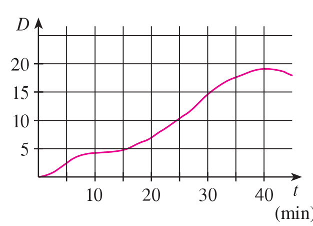
36. La producción de trigo en un año dado, W, depende de la temperatura promedio T y de la precipitación pluvial anual R. Los científicos estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de 0.15 °C/año, y que la precipitación está disminuyendo a razón de 0.1 cm/año. También estiman que, a niveles de producción actuales, $\partial W/\partial T = -2$ y $\partial W/\partial R = 8$.

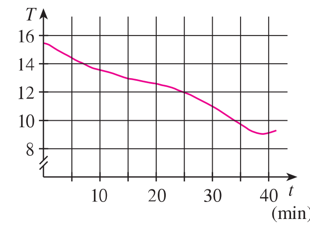
a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?
b) Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo, dW/dt.

37. La velocidad del sonido que viaja a través del agua del mar con salinidad de 35 partes por millar, está modelada por la ecuación

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T es la temperatura (en grados celsius) y D es la profundidad por abajo de la superficie del mar (en metros). Un buzo en escafandra autónoma empieza a sumergirse en el agua del mar; la profundidad del buzo y la temperatura del agua que lo rodea con respecto al tiempo se registran en las gráficas siguientes. Estime la razón de cambio, con respecto al tiempo, de la velocidad del sonido a través del agua de mar que experimentó el buzo durante una inmersión de 20 min. ¿Cuáles son las unidades?





38. El radio de un cono circular recto se incrementa a una razón de 1.8 pulg/s, mientras su altura disminuye a razón de 2.5 pulg/s. ¿A qué razón cambia el volumen del cono cuando el radio es 120 pulg y la altura es de 140 pulg?

39. La longitud ℓ, ancho w y altura h de una caja cambia con el tiempo. En un cierto instante, las dimensiones son $\ell = 1$ m y $w = h = 2$ m, y ℓ y w se incrementan a razón de 2 m/s, en tanto que h disminuye a razón de 3 m/s. Encuentre en ese instante las razones a las cuales las siguientes magnitudes cambian.

a) El volumen
b) El área superficial
c) La longitud de la diagonal

40. El voltaje V en un circuito eléctrico sencillo disminuye con lentitud a medida que la batería se gasta. La resistencia R se incrementa lentamente cuando el resistor se calienta. Mediante la ley de Ohm, $V = IR$, determine cómo cambia la corriente I en el momento en que $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08$ A, $dV/dt = -0.01$ V/s y $dR/dt = 0.03\ \Omega$/s.

41. La presión de un mol de un gas ideal se incrementa a razón de 0.05 kPa/s y la temperatura aumenta a razón de 0.15 K/s. Utilice la ecuación del ejemplo 2 para determinar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de 20 kPa y la temperatura es de 320 K.

42. Un fabricante ha modelado su producción anual como una función P (el valor de toda la producción en millones de dólares) como una función de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.47L^{0.65}K^{0.35}$$

donde L es el número en horas de mano de obra (en miles) y K es el capital invertido (en millones de dólares). Supongamos que cuando $L = 30$ y $K = 8$, la fuerza laboral disminuye a razón de 2000 horas de mano de obra por año y el capital está creciendo a razón de $500 000 por año. Encuentre la razón de cambio de la producción.

43. Un lado de un triángulo está creciendo a razón de 3 cm/s y un segundo lado está decreciendo a razón de 2 cm/s. Si el área del triángulo permanece constante, ¿a qué razón cambia el ángulo entre los lados cuando el primer lado mide 20 cm de largo, el segundo lado es de 30 cm, y el ángulo es $\pi/6$?

44. Si un sonido de frecuencia f_s es producido por una fuente que se desplaza a lo largo de una recta con rapidez v_s y un observador se mueve con rapidez v_o a lo largo de la misma recta desde la dirección opuesta hacia la fuente, entonces la frecuencia del sonido escuchado por el observador es

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

donde c es la velocidad del sonido, de unos 332 m/s. (Éste es el **efecto Doppler**). Suponga que, en un momento en particular, usted está en un tren que corre a 34 m/s y que acelera a 1.2 m/s^2. Un tren se aproxima desde la dirección opuesta en la otra vía a 40 m/s, acelerando a 1.4 m/s^2, y hace sonar su silbato, que tiene una frecuencia de 460 Hz. En ese instante, ¿cuál es la frecuencia percibida que usted escucha y con qué rapidez está cambiando?

45-48 Suponga que todas las funciones dadas son derivables.

45. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, a) determine $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial\theta$ y b) demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s\cos t$ y $y = e^s\,\text{sen}\,t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Si $z = f(x - y)$, demuestre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Si $z = f(x, y)$, donde $x = s + t$ y $y = s - t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

49-54 Suponga que todas las funciones dadas tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

49. Demuestre que cualquier función de la forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Sugerencia*: sea $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s\cos t$ y $y = e^s\,\text{sen}\,t$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. Compare con el ejemplo 7.

52. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, determine a) $\partial z/\partial r$, b) $\partial z/\partial\theta$, y c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponga que $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$.

a) Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

b) Encuentre una fórmula similar para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Una función f se llama **homogénea de grado *n*** si satisface la ecuación $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para toda t, donde n es un entero positivo y f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden.

a) Compruebe que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ es homogénea de grado 3.

b) Demuestre que si f es homogénea de grado n, entonces

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Sugerencia:* aplique la regla de la cadena para derivar $f(tx, ty)$ con respecto a t.]

56. Si f es homogénea de grado n, demuestre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n - 1)f(x, y)$$

57. Si f es homogénea de grado n, demuestre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define en forma implícita cada una de las tres variables x, y y z como funciones de otras dos: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Si F es derivable y F_x, F_y y F_z son diferentes de cero, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. La ecuación 6 es una fórmula para la derivada dy/dx de una función definida implícitamente por una ecuación $F(x, y) = 0$, siempre que F sea derivable y que $F_y \neq 0$. Demuestre que si F tiene segundas derivadas continuas, entonces una fórmula para la segunda derivada de y es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

14.6 Derivadas direccionales y el vector gradiente

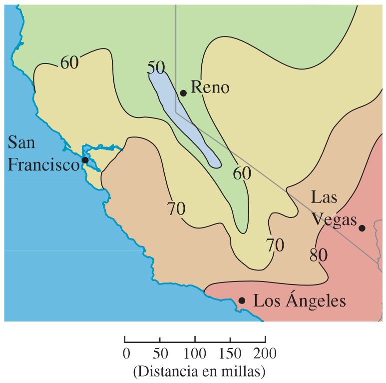


FIGURA 1

En el mapa del clima de la figura 1, se muestra un mapa de contorno de la función temperatura $T(x, y)$ para los estados de California y Nevada a las 3:00 PM, de un día de octubre. Las curvas de nivel o isotermas, unen localidades con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Reno es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia si viajamos hacia el este desde Reno; T_y es la razón de cambio de la temperatura si viajamos hacia el norte. Pero, ¿qué sucede si queremos saber la razón de cambio de la temperatura cuando viaja hacia el sureste; es decir, hacia Las Vegas, o en alguna otra dirección? En esta sección se estudia un tipo de derivada, que se denomina *derivada direccional*, que permite calcular la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

Derivadas direccionales

Recuerde que si $z = f(x, y)$, entonces las derivadas parciales f_x y f_y se definen como

1
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

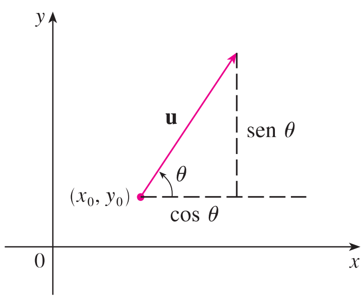


FIGURA 2
Un vector unitario
$\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$

y representan las razones de cambio de z en las direcciones x y y; es decir, en las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

Supongamos que ahora queremos encontrar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Véase figura 2.) Para hacer esto consideremos la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$ (la gráfica de f), y sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ queda sobre S. El plano vertical que pasa por P en la dirección de $\mathbf{u}$ interseca a S en una curva C (véase figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de $\mathbf{u}$.

TEC Visual 14.6A incluye figuras animadas de la figura 3 al hacer girar $\mathbf{u}$ y, por lo tanto T.

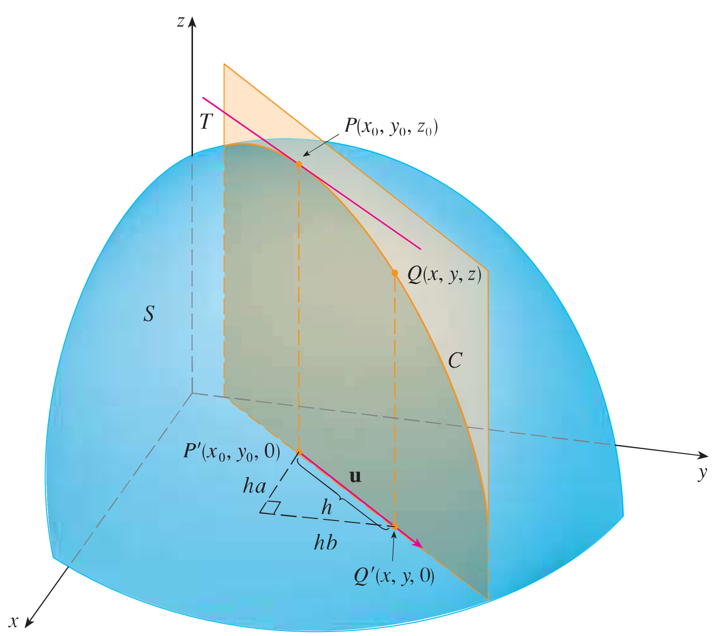


FIGURA 3

Si $Q(x, y, z)$ es otro punto sobre C y P', Q' son las proyecciones de P, Q sobre el plano xy, entonces el vector es paralelo a $\mathbf{u}$ y entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algún escalar h. Por tanto, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, por lo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos la razón de cambio de z con respecto a la distancia en la dirección de $\mathbf{u}$, la cual se denomina derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$.

2 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Al comparar la definición 2 con las ecuaciones $\boxed{1}$, observamos que si $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ y si $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. En otras palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son justamente casos especiales de la derivada direccional.

EJEMPLO 1 Con ayuda del mapa del clima ilustrado en la figura 1 estime el valor de la derivada direccional de la función de la temperatura en Reno en la dirección sureste.

SOLUCIÓN El vector unitario dirigido hacia el sureste es $\mathbf{u} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$, pero no es necesario recurrir a esta expresión. Inicie dibujando una recta que pase por Reno y que se dirija hacia el sureste (véase figura 4).

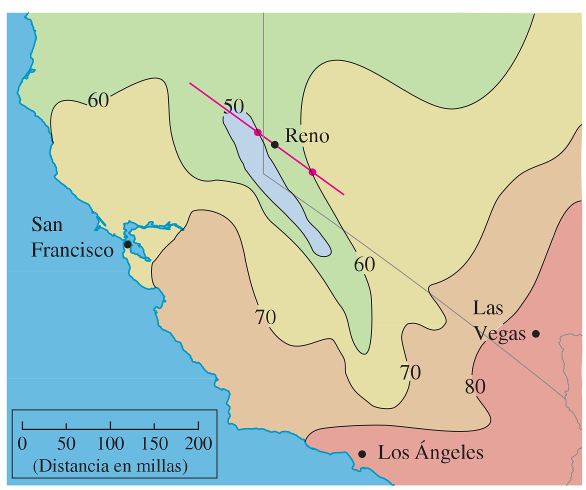


FIGURA 4

Aproximamos a la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} T$ mediante el promedio de la razón de cambio de la temperatura entre los puntos donde la recta interseca las isotermas $T = 50$ y

$T = 60$. La temperatura en el punto al sureste de Reno es $T = 60$ °F y la temperatura en el punto noroeste de Reno es $T = 50$ °F. Al parecer, la distancia entre estos puntos es de casi 75 millas. De este modo, la razón de cambio de la temperatura en la dirección sureste es

$$D_{\mathbf{u}} T \approx \frac{60 - 50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0.13 \text{ °F/mi}$$

Cuando calculamos la derivada direccional de una función que está definida por medio de una fórmula, en general aplicamos el teorema siguiente.

3 Teorema Si f es una función derivable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

DEMOSTRACIÓN Si definimos una función g de una variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

entonces según la definición de la derivada

$$\boxed{4} \qquad g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por otro lado, podemos escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de modo que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

Si ahora hacemos $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$, y

$$\boxed{5} \qquad g'(0) = f_x(x_0, y_0)\, a + f_y(x_0, y_0)\, b$$

Al comparar las ecuaciones 4 y 5, observe que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\, a + f_y(x_0, y_0)\, b$$

Si el vector unitario $\mathbf{u}$ forma un ángulo θ con el eje positivo x (como en la figura 2), entonces podemos escribir $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$ y así la fórmula del teorema 3 se transforma en

$$\boxed{6} \qquad D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos\theta + f_y(x, y) \operatorname{sen}\theta$$

EJEMPLO 2 Determine la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y $\mathbf{u}$ es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Qué es $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

La derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ del ejemplo 2 representa la razón de cambio de z en la dirección de $\mathbf{u}$. Es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ y el plano vertical que pasa por $(1, 2, 0)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ mostrada en la figura 5.

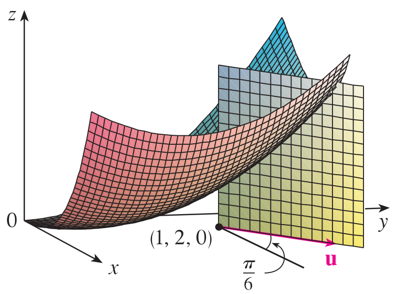


FIGURA 5

SOLUCIÓN Con la fórmula 6 se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\, x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

El vector gradiente

Observe que de acuerdo con el teorema 3, la derivada direccional de una función derivable se puede escribir como el producto punto de dos vectores:

7
$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

El primer vector en este producto punto se presenta no sólo al calcular las derivadas direccionales, sino también en muchos otros contextos. Por eso se le da un nombre especial, *gradiente de f*, y una notación especial (**grad** f o ∇f, que se lee "nabla f").

8 Definición Si f es una función de dos variables x y y, entonces el **gradiente** de f es la función vectorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$, entonces

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

y
$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

Con esta notación para el vector gradiente, podemos escribir la expresión (7) para la derivada direccional como

9
$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}}$$

Esta ecuación expresa la derivada direccional en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$ como la proyección escalar del vector gradiente en $\mathbf{u}$.

Vector gradiente $\nabla f(2, -1)$ del ejemplo 4 se muestra en la figura 6 con punto inicial (2, 21). También se muestra el vector **v** que da la dirección de la derivada direccional. Ambos vectores se superponen sobre el mapa de contorno de la gráfica de f.

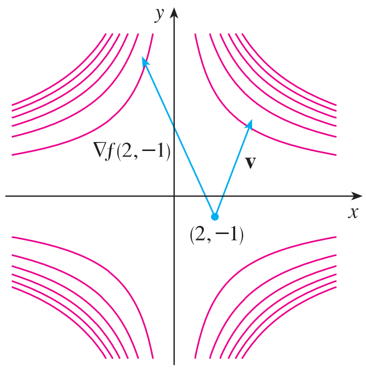


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Determine la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto $(2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN Primero calculamos el vector gradiente en $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\,\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$$

Note que **v** no es un vector unitario, pero como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, el vector unitario en la dirección de **v** es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}$$

Por lo tanto, según la ecuación 9, tenemos

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j} \right)$$

$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Funciones de tres variables

Para funciones de tres variables podemos definir las derivadas direccionales de una manera similar. Otra vez, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ puede interpretarse como la razón de cambio de la función en la dirección de un vector unitario **u**.

10 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si este límite existe.

Si utilizamos la notación de vectores, entonces podemos escribir ambas definiciones, 2 y 10, de la derivada direccional en la forma compacta

11
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

donde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ si $n = 2$ y $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ si $n = 3$. Esto es razonable porque la ecuación vectorial de la recta que pasa por $\mathbf{x}_0$ en la dirección del vector **u** está dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ (ecuación 12.5.1) y de este modo $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa el valor de f en un punto sobre esta recta.

Si $f(x, y, z)$ es derivable y $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$, entonces utilice el mismo método que se aplicó en el teorema 3 para demostrar que

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\, a + f_y(x, y, z)\, b + f_z(x, y, z)\, c \tag{12}$$

Por lo que toca a la función f de tres variables, el **vector gradiente**, denotado por ∇f o **grad** f, es

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle$$

es decir,

$$\boxed{\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}} \tag{13}$$

Entonces, justo como en las funciones de dos variables, la fórmula 12 de la derivada direccional se puede volver a expresar como

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}} \tag{14}$$

V EJEMPLO 5 Si $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, a) determine el gradiente de f y b) encuentre la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN

a) El gradiente de f es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz\rangle \end{aligned}$$

b) En $(1, 3, 0)$ tenemos $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3\rangle$. El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Por lo tanto, la ecuación 14 da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Maximización de la derivada direccional

Suponga que tenemos una función f de dos o tres variables y consideramos todas las derivadas direccionales posibles de f en un punto dado. Éstas dan las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Cabe entonces, plantear las preguntas: ¿en cuál de estas direcciones f cambia más rápido y cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas las proporciona el teorema siguiente.

TEC Visual 14.6B proporciona confirmación visual del teorema 15.

15 Teorema Supongamos que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y se presenta cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

DEMOSTRACIÓN Según la ecuación 9 o la 14 tenemos

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$. El valor máximo de $\cos\theta$ es 1 y esto ocurre cuando $\theta = 0$. Por lo tanto, el valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ es $|\nabla f|$ y se presenta cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f.

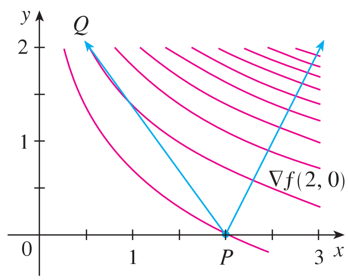


FIGURA 7

En (2, 0) la función del ejemplo 6 se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$. Observe que según la figura 7 este vector, al parecer, es perpendicular a la curva de nivel que pasa por (2, 0). En la figura 8 se ilustra la gráfica de f y el vector gradiente.

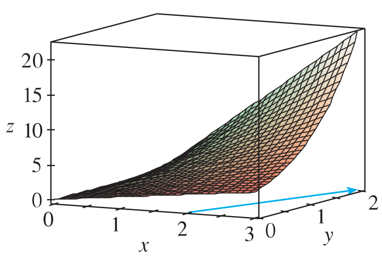


FIGURA 8

EJEMPLO 6

a) Si $f(x, y) = xe^y$, determine la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

b) ¿En qué dirección f tiene la máxima razón de cambio? ¿Cuál es esta máxima razón de cambio?

SOLUCIÓN

a) Primero calculamos el vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ} = \langle -1.5, 2\rangle$ es $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$, de modo que la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

b) De acuerdo con el teorema 15, f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2\rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2\rangle| = \sqrt{5}$$

EJEMPLO 7 Supongamos que la temperatura en un punto (x, y, z) en el espacio está dado por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, donde T se mide en grados celsius y x, y, z en metros. ¿En qué dirección se incrementa más rápido la temperatura en el punto $(1, 1, -2)$? ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

SOLUCIÓN El gradiente de T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k})$$

En el punto $(1, 1, -2)$ el vector gradiente es

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

De acuerdo con el teorema 15, la temperatura se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ o bien, en forma equivalente, en la dirección de $-\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$ o del vector unitario $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. La máxima razón de incremento es la longitud del vector gradiente:

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Por lo tanto, la máxima razón de incremento de temperatura es $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4$ °C/m.

Planos tangentes a superficies de nivel

Suponga que S es una superficie cuya ecuación es $f(x, y, z) = k$, es decir, es una superficie de nivel de una función F de tres variables, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Sea C una curva que queda en la superficie S y pasa por el punto P. Recuerde que según la sección 13.1, la curva C se describe mediante una función vectorial continua $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Sea t_0 el valor del parámetro que corresponde a P; es decir, $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Puesto que C está sobre S, cualquier punto $(x(t), y(t), z(t))$ debe satisfacer la ecuación de S, es decir,

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k \tag{16}$$

Si x, y y z son funciones derivables de t y F es también derivable, entonces se aplica la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación 16 como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \tag{17}$$

Pero, como $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z\rangle$ y $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$, la ecuación 17 se puede escribir en función de un producto punto como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

En particular, cuando $t = t_0$ tenemos $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, de modo que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0 \tag{18}$$

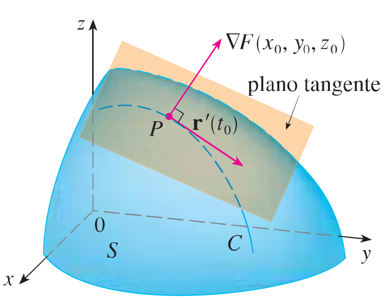


FIGURA 9

La ecuación 18 establece que *el vector gradiente en P, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, es perpendicular al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ a cualquier curva C sobre S que pasa por P* (véase figura 9). Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, es por lo tanto natural definir el **plano tangente a la superficie de nivel** $F(x, y, z) = k$ **en** $P(x_0, y_0, z_0)$ como el plano que pasa por P y tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Si aplicamos la ecuación estándar de un plano (ecuación 12.5.7), podemos escribir la ecuación de este plano tangente como

$$\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0} \tag{19}$$

La **recta normal** a S en P es la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente. La dirección de la recta normal está definida, por lo tanto, por el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y, de este modo, mediante la ecuación 12.5.3, sus ecuaciones simétricas son

$$\boxed{20} \qquad \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

En el caso especial en el cual la ecuación de una superficie S es de la forma $z = f(x, y)$ (es decir, S es la gráfica de una función f de dos variables), podemos volver a escribir la ecuación como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

y considerar S como una superficie de nivel de F, con $k = 0$. Entonces

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$
$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$
$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

de modo que la ecuación 19 se vuelve

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

que equivale a la ecuación 14.4.2. Por lo tanto, la nueva definición más general de un plano tangente es congruente con la definición que se dio para el caso especial de la sección 14.4.

V EJEMPLO 8 Determine las ecuaciones del plano tangente y recta normal en el punto $(-2, 1, -3)$ al elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUCIÓN El elipsoide es la superficie de nivel (con $k = 3$) de la función:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

En la figura 10 se muestra el elipsoide, el plano tangente y la recta normal del ejemplo 8.

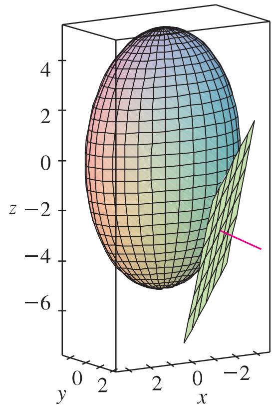


FIGURA 10

Por lo tanto,

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Entonces la ecuación 19 da la ecuación del plano tangente en $(-2, 1, -3)$ cuando

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

lo cual se simplifica a $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Según la ecuación 20, las ecuaciones de la recta normal son

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

Significancia del vector gradiente

Ahora se resumen los modos en los que el vector gradiente es importante. Primero se considera una función f de tres variables y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en su dominio. Por otro lado, de acuerdo con el teorema 15, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección del incremento más rápido de f. Además, también sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel S de f que pasa por P (refiérase a la figura 9). Estas dos propiedades son compatibles intuitivamente porque, a medida que se aleja de P en la superficie de nivel S, el valor de f no cambia. Así, parece razonable que si nos movemos en dirección perpendicular, se consigue el incremento máximo.

De manera similar se considera una función f de dos variables y un punto $P(x_0, y_0)$ en su dominio. Una vez más, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ señala la dirección del incremento más rápido de f. Asimismo, mediante consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P. Otra vez es intuitivamente posible porque los valores de f siguen siendo constantes a medida que se mueve a lo largo de la curva (véase la figura 11).

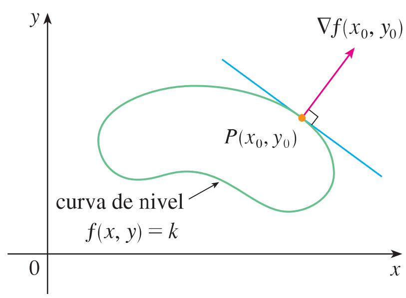


FIGURA 11

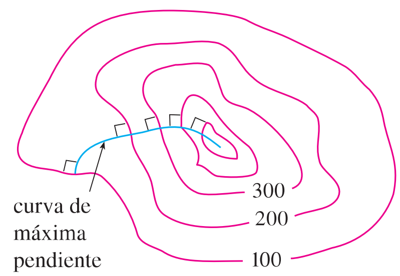
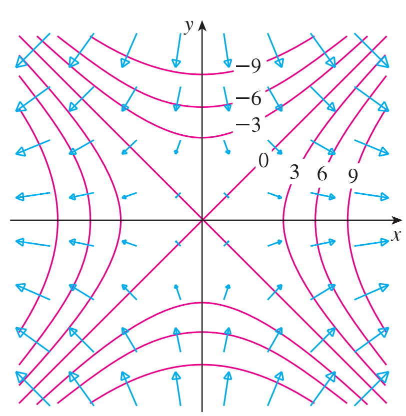


FIGURA 12

Si consideramos un mapa topográfico de una colina y representamos mediante $f(x, y)$ la altura por arriba del nivel del mar de un punto de coordenadas (x, y), entonces se puede dibujar una curva de máxima pendiente como en la figura 12, haciéndola perpendicular a todas las curvas de nivel. Este fenómeno también se puede observar en la figura 12 de la sección 14.1, donde Lonesome Creek sigue una curva con el descenso más empinado.

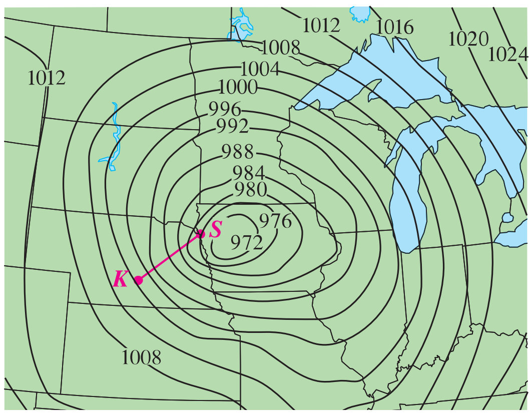
Los sistemas algebraicos computarizados poseen comandos para dibujar muestras de vectores gradiente. Cada vector gradiente $\nabla f(a, b)$ se grafica de tal manera que inicie en el punto (a, b). En la figura 13 se ilustra una gráfica de éstas (que se denominan *campo del vector gradiente*) para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobrepuesta en un mapa de contorno de f. Como era de esperarse, los vectores gradiente apuntan “pendiente arriba” y son perpendiculares a las curvas de nivel.

FIGURA 13

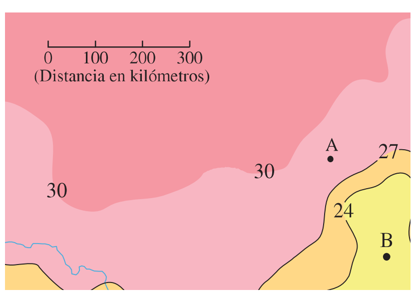


14.6 Ejercicios

1. Se muestran curvas de nivel para la presión barométrica (en milibares), para las 6:00 AM del 10 de noviembre de 1998. Una zona con una presión de sólo 972 mb se mueve la región noreste de Iowa. La distancia a lo largo de la línea roja de K (Kearney, Nebraska) a S (Sioux City, Iowa) es 300 km. Estime el valor de la derivada direccional de la función presión en Kearney en la dirección de Sioux City. ¿Cuáles son las unidades de la derivada direccional?



2. El mapa de contornos muestra el promedio de temperatura máxima para noviembre de 2004 (en °C). Estime el valor de la derivada direccional de esta función temperatura en A, en la dirección de B. ¿Cuáles son las unidades?



3. Una tabla de valores para el índice de temperatura de sensación $W = f(T, v)$ se proporciona en el ejercicio 3 de la página 911. Mediante esta tabla, estime el valor de $D_{\mathbf{u}}f(-20, 30)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4-6 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.

4. $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3$, $(1, 1)$, $\theta = \pi/6$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = e^x \cos y$, $(0, 0)$, $\theta = \pi/4$

7-10
a) Determine el gradiente de f.
b) Evalúe el gradiente en el punto P.
c) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $P(-6, 4)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$

8. $f(x, y) = y^2/x$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\mathbf{j})$

9. $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $P(2, -1, 1)$, $\mathbf{u} = \langle 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \rangle$

10. $f(x, y, z) = y^2e^{xyz}$, $P(0, 1, -1)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13} \rangle$

11-17 Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$

12. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = \langle 3, 5 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

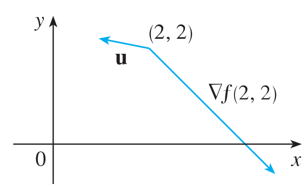
14. $g(r, s) = \tan^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

17. $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)$, $(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

18. Use la figura para estimar $D_{\mathbf{u}}f(2, 2)$.



19. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en $P(2, 8)$ en la dirección de $Q(5, 4)$.

20. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ en $P(1, -1, 3)$ en la dirección de $Q(2, 4, 5)$.

21-26 Determine la máxima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en la cual se presenta.

21. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $(4, 1)$

22. $f(s, t) = te^{st}$, $(0, 2)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x, y)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(p, q, r) = \arctan(pqr)$, $(1, 2, 1)$

27. a) Demuestre que una función derivable f disminuye más rápidamente en $\mathbf{x}$ en la dirección opuesta al vector gradiente, es decir, en la dirección de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
b) Mediante el resultado del inciso a), determine la dirección en que la función $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decrece más rápidamente en el punto $(2, -3)$.

28. Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ en el punto $(0, 2)$ tiene el valor de 1.

29. Encuentre todos los puntos en los cuales la dirección del cambio más rápido de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. En las cercanías de una boya, la profundidad de un lago en el punto de coordenadas (x, y) es $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, donde x, y y z se miden en metros. Un pescador en un bote pequeño parte del punto $(80, 60)$ y se dirige hacia la boya, la cual se ubica en $(0, 0)$. ¿El agua bajo el bote se hace más somera o más profunda cuando el pescador parte? Explique.

31. La temperatura T en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es 120°.
a) Determine la razón de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección hacia el punto $(2, 1, 3)$.
b) Demuestre que en cualquier punto en la bola la dirección de incremento más grande de temperatura está dado por un vector que apunta hacia el origen.

32. La temperatura en un punto (x, y, z) está dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

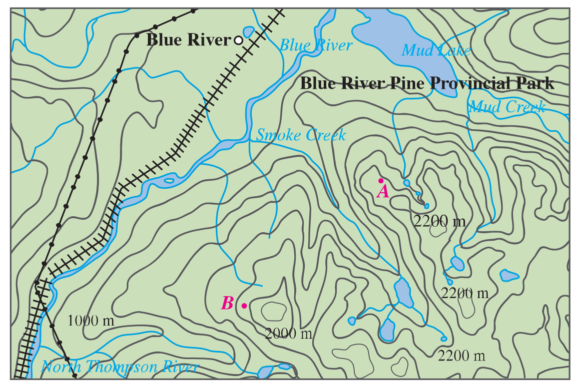
donde T se mide en °C y x, y, z en metros.
a) Determine la razón de cambio de la temperatura en el punto $P(2, -1, 2)$ en la dirección hacia el punto $(3, -3, 3)$.
b) ¿En qué dirección la temperatura se incrementa más rápido en P?
c) Encuentre la razón máxima de incremento en P.

33. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
b) ¿En qué dirección cambia V con mayor rapidez en P?
c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio en P?

34. Suponga que escala una montaña cuya forma la da la ecuación $z = 1000 - 0.005 - 0.01y^2$, donde x, y, z se dan en metros, y usted está parado en un punto cuyas coordenadas son $(60, 40, 966)$. El eje de las x positivas va hacia el este y el eje de las y positivas va hacia el norte.
a) Si camina directo hacia el sur, ¿empezará a ascender o descender? ¿Con qué rapidez?
b) Si camina hacia el noroeste, ¿empezará a ascender o descender? ¿Con qué rapidez?
c) ¿En qué dirección es la máxima pendiente? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección? ¿En qué ángulo por arriba de la horizontal la trayectoria inicia en esa dirección?

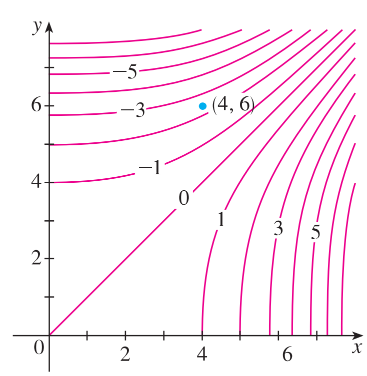
35. Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

36. Se muestra un mapa topográfico de Blue River Pine Provincial Park en British Columbia. Dibuje curvas de mayor descenso a partir del punto A (descendiendo a Mud Lake) y desde el punto B.



37. Demuestre que la operación de obtener el gradiente de una función tiene la propiedad dada. Suponga que u y v son funciones derivables de x y y y que a, b son constantes.
a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$
c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Trace el vector gradiente $\nabla f(4, 6)$ para la función f cuyas curvas de nivel se muestran. Explique cómo selecciona la dirección y la longitud del vector.



39. La segunda derivada direccional de $f(x, y)$ es

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) = D_{\mathbf{u}}[D_{\mathbf{u}} f(x, y)]$$

Si $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$ y $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, calcule $D_{\mathbf{u}}^2 f(2, 1)$.

40. a) Si $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es un vector unitario y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}a^2 + 2f_{xy}ab + f_{yy}b^2$$

b) Encuentre la segunda derivada direccional de $f(x, y) = xe^{2y}$ en la dirección de $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$.

41-46 Determine las ecuaciones de a) el plano tangente y b) de la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

41. $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10, \quad (3, 3, 5)$

42. $y = x^2 - z^2, \quad (4, 7, 3)$

43. $xyz^2 = 6, \quad (3, 2, 1)$

44. $xy + yz + zx = 5, \quad (1, 2, 1)$

45. $x + y + z = e^{xyz}, \quad (0, 0, 1)$

46. $x^4 + y^4 + z^4 = 3x^2y^2z^2, \quad (1, 1, 1)$

47-48 Mediante una computadora grafique la superficie, el plano tangente y la recta normal en la misma pantalla. Escoja cuidadosamente el dominio para evitar planos verticales extraños. Elija la perspectiva que le permita visualizar bien los tres objetos.

47. $xy + yz + zx = 3, \quad (1, 1, 1)$ **48.** $xyz = 6, \quad (1, 2, 3)$

49. Si $f(x, y) = xy$, determine el vector gradiente $\nabla f(3, 2)$ y con éste determine la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 6$ en el punto $(3, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

50. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, determine el vector gradiente $\nabla g(1, 2)$ y utilícelo para encontrar la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 1$ en el punto $(1, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

51. Demuestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede escribir como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

52. Encuentre la ecuación del plano tangente al hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ en (x_0, y_0, z_0) y exprésela en forma similar a la del ejercicio 51.

53. Demuestre que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ en el punto (x_0, y_0, z_0) puede expresarse como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

54. ¿En qué punto del paraboloide $y = x^2 + z^2$ el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + 3z = 1$?

55. ¿Existen puntos sobre el hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $z = x + y$?

56. Demuestre que el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ son tangentes entre sí en el punto $(1, 1, 2)$. (Esto significa que tienen un plano tangente común en ese punto.)

57. Demuestre que todo plano que es tangente al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.

58. Demuestre que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pasa por el centro de la esfera.

59. ¿Dónde la recta normal al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 2)$ interseca al paraboloide por segunda vez?

60. ¿En qué puntos la recta normal que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ sobre el elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ interseca la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 102$?

61. Demuestre que la suma de las intersecciones con los ejes x, y y z de cualquier plano tangente a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ es una constante.

62. Demuestre que las pirámides cortadas desde el primer octante por cualesquier planos tangentes a la superficie $xyz = 1$, en puntos del primer octante, deben tener todas el mismo volumen.

63. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el punto $(-1, 1, 2)$.

64. a) El plano $y + z = 3$ al cortar al cilindro $x^2 + y^2 = 5$ forma una elipse. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 1)$.

b) Grafique el cilindro, el plano y la recta tangente en la misma pantalla.

65. a) Dos superficies son **ortogonales** en un punto de intersección si las rectas normales son perpendiculares en ese punto. Demuestre que las superficies con ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en un punto P donde $\nabla F \neq 0$ y $\nabla G \neq 0$ si y sólo si

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0 \quad \text{en } P.$$

b) Con ayuda del inciso a) demuestre que las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ son ortogonales en cada punto de intersección. Sin usar el cálculo, ¿se da cuenta por qué esto es cierto?

66. a) Demuestre que la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ es continua y que las derivadas parciales f_x y f_y existen en el origen, pero que no existen las derivadas direccionales en todas las otras direcciones.

b) Grafique f cerca del origen y comente cómo la gráfica confirma el inciso a).

67. Suponga que las derivadas direccionales de $f(x, y)$ se conocen en un punto dado en dos direcciones no paralelas dadas por los vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Es posible determinar ∇f en ese punto? Si es así, ¿cómo lo haría?

68. Demuestre que si $z = f(x, y)$ es derivable en $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Sugerencia:* use directamente la definición 14.4.7.]

14.7 Valores máximos y mínimos

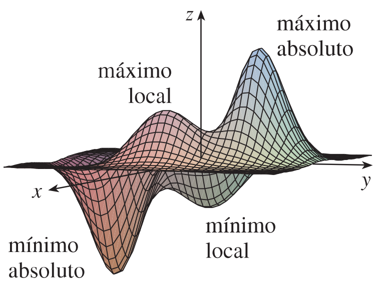


FIGURA 1

Como se estableció en el capítulo 4, una de las principales aplicaciones de las derivadas ordinarias es hallar los valores máximos y mínimos. En esta sección aprenderá cómo usar las derivadas parciales para localizar los máximos y mínimos de funciones de dos variables. En particular, el ejemplo 6 trata de cómo maximizar el volumen de una caja sin tapa sin tener una cantidad fija de cartón para hacerla.

Observe las colinas y los valles en la gráfica de f mostrada en la figura 1. Hay dos puntos (a, b) para los cuales f tiene un *máximo local*, es decir, donde $f(a, b)$ es mayor que los valores cercanos de $f(x, y)$. El mayor de estos valores es el *máximo absoluto*. Asimismo, f tiene dos *mínimos locales*, donde $f(a, b)$ es más pequeña que los valores cercanos. El menor de estos dos valores es el *mínimo absoluto*.

1 Definición Una función de dos variables tiene un **máximo local** en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b). [Esto significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en algún disco con centro (a, b).] El número $f(a, b)$ recibe el nombre de **valor máximo local**. Si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b), entonces f tiene un **mínimo local** en (a, b) y $f(a, b)$ es un **valor mínimo local**.

Si las desigualdades de la definición 1 se cumplen para *todos* los puntos (x, y) en el dominio de f, entonces f tiene un **máximo absoluto**, o un **mínimo absoluto**, en (a, b).

Observe que la conclusión del teorema 2 se puede establecer con la notación de los vectores gradiente como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

2 Teorema Si f tiene un máximo local o un mínimo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f existen ahí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = f(x, b)$. Si f tiene un máximo local o un mínimo local en (a, b), entonces g tiene un máximo local o un mínimo local en a, así que $g'(a) = 0$ según el teorema de Fermat (véase teorema 4.1.4). Pero $g'(a) = f_x(a, b)$ (véase ecuación 14.3.1) de modo que $f_x(a, b) = 0$. De igual manera, al aplicar el teorema de Fermat a la función $G(y) = f(a, y)$, obtenemos $f_y(a, b) = 0$.

Si hacemos $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación de un plano tangente (ecuación 14.4.2), obtenemos $z = z_0$. Por lo tanto, la interpretación geométrica del teorema 2 es que si la gráfica de f tiene un plano tangente en un máximo local o en un mínimo local, entonces el plano tangente debe ser horizontal.

Un punto (a, b) se llama **punto crítico** (o *punto estacionario*) de f si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de estas derivadas parciales no existe. El teorema 2 dice que si f tiene un máximo local o un mínimo local en (a, b), entonces (a, b) es un punto crítico de f. Sin embargo, como en el cálculo de una variable, no todos los puntos críticos generan un máximo o un mínimo. En un punto crítico, una función podría tener un máximo local o un mínimo local o ninguno de los dos.

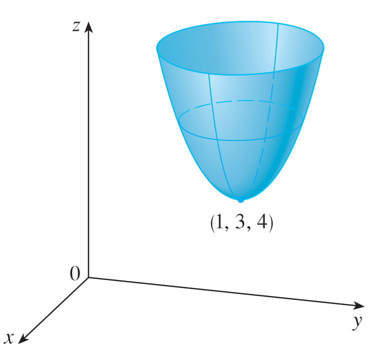


FIGURA 2
$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Entonces,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Estas derivadas parciales son iguales a 0 cuando $x = 1$ y $y = 3$, de modo que el único punto crítico es $(1, 3)$. Al completar el cuadrado, se encuentra que

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Puesto que $(x - 1)^2 \geqslant 0$ y $(y - 3)^2 \geqslant 0$, tenemos que $f(x, y) \geqslant 4$ para todos los valores de x y y. Por lo tanto, $f(1, 3) = 4$ es un mínimo local y, de hecho, es el mínimo absoluto de f.

Esto se puede confirmar en forma geométrica a partir de la gráfica de f la cual es el paraboloide elíptico con vértice (1, 3, 4) como se muestra en la figura 2.

EJEMPLO 2 Calcule los valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

SOLUCIÓN Puesto que, $f_x = -2x$ y $f_y = 2y$, el único punto crítico es (0, 0). Observe que para los puntos en el eje x, $y = 0$, de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$). No obstante, para puntos en el eje y, $x = 0$, de modo que $f(x, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). Por lo tanto, todo disco con centro en (0, 0) contiene puntos donde f toma valores positivos, así como puntos donde f toma valores negativos. Por lo tanto, $f(0, 0) = 0$ no puede ser un valor extremo de f, de modo que f no tiene valor extremo.

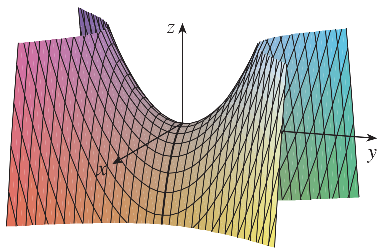


FIGURA 3
$z = y^2 - x^2$

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que una función no necesariamente tiene valor máximo o mínimo en un punto crítico. En la figura 3 se ilustra la manera como esto es posible. La gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, por la que pasa un plano tangente horizontal ($z = 0$) en el origen. Podemos ver que $f(0, 0) = 0$ es un máximo en la dirección del eje x pero un mínimo es la dirección del eje y. Cerca del origen, la gráfica tiene la forma de una silla de montar y por eso (0, 0) se llama *punto silla* de f.

Un paso de montaña también tiene la forma de silla de montar. Como se ve en la figura, la fotografía de una formación geológica ilustra, para la gente en un sendero en una dirección, el punto de silla es un mínimo en su ruta, mientras que para otra que se mueve en una dirección diferente, el punto de silla es un punto máximo.

Es necesario ser capaz de determinar si la función tiene o no un valor extremo en un punto crítico. La prueba siguiente, que se demuestra al final de la sección, es análoga a la prueba de la segunda derivada para funciones de una variable.

3 **Prueba de la segunda derivada** Supongamos que las segundas derivadas parciales de f son continuas sobre un disco de centro (a, b), y supongamos que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\,f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.

c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo local ni un mínimo local.

NOTA 1 En caso de c) el punto (a, b) se llama **punto silla** de f y la gráfica de f cruza el plano tangente en (a, b).

NOTA 2 Si $D = 0$, la prueba no proporciona información: f podría tener un máximo local o un mínimo local en (a, b), o bien, en (a, b) podría haber un punto silla de f.

NOTA 3 Para recordar la fórmula de D es útil escribirla como un determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

V **EJEMPLO 3** Determine los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUCIÓN Primero localizamos los puntos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^3 - x = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituimos $y = x^3$ de la primera ecuación en la segunda, y obtenemos

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

de modo que hay tres raíces reales: $x = 0, 1, -1$. Los tres puntos críticos son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Luego calculamos la segunda derivada parcial y $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Puesto que $D(0, 0) = -16 < 0$, se infiere del caso c) de la prueba de la segunda derivada que el origen es un punto silla; es decir, f no tiene máximo ni mínimo local en $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, se ve que según el caso a) de la prueba que $f(1, 1) = -1$ es un mínimo local. De igual manera, $D(-1, -1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, de modo que $f(-1, -1) = -1$ es también un mínimo local.

La gráfica de f se ilustra en la figura 4.

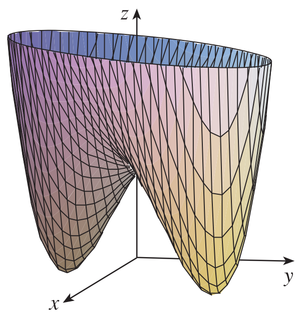


FIGURA 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

En la figura 5 se ilustra el mapa de contorno de la función f del ejemplo 3. Las curvas de nivel cerca de $(1, 1)$ y de $(-1, -1)$ son de forma oval e indican que a medida que se aleja de $(1, 1)$ o $(-1, -1)$ en cualquier dirección, los valores de f son crecientes. Las curvas de nivel cerca de $(0, 0)$, por otra parte, se asemejan a hipérbolas y dejan ver que cuando se aleja del origen (donde el valor de f es 1), los valores de f decrecen en algunas direcciones pero crecen en otras. Por lo tanto, el mapa de contorno sugiere la presencia de los mínimos y del punto de silla que se encontró en el ejemplo 3.

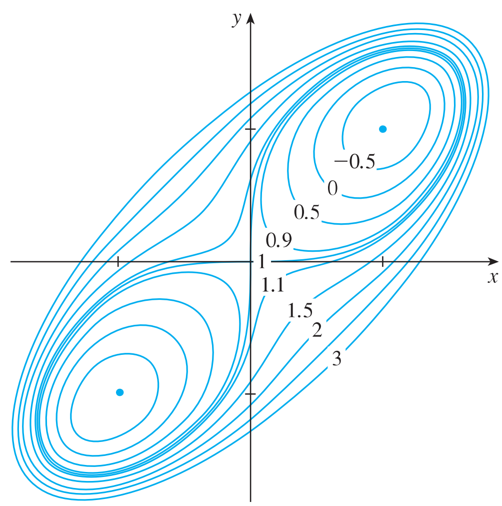


FIGURA 5

TEC Module 14.7 puede utilizar mapas de contorno para estimar las ubicaciones de los puntos críticos.

EJEMPLO 4 Determine y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Además, encuentre el punto más alto en la gráfica de f.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales de primer orden son

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \qquad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

De modo que para determinar los puntos críticos, necesitamos resolver las ecuaciones

$$\boxed{4} \qquad 2x(10y - 5 - 2x^2) = 0$$

$$\boxed{5} \qquad 5x^2 - 4y - 4y^3 = 0$$

Según la ecuación 4

$$x = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

En el primer caso ($x = 0$), la ecuación 5 se vuelve $-4y(1 + y^2) = 0$, de modo que $y = 0$ y tenemos el punto crítico $(0, 0)$.

En el segundo caso, $10y - 5 - 2x^2 = 0$, obtenemos

$$\boxed{6} \qquad x^2 = 5y - 2.5$$

y al llevar esto a la ecuación 5, obtenemos $25y - 12.5 - 4y - 4y^3 = 0$. Entonces, hay que resolver la ecuación cúbica

$$\boxed{7} \qquad 4y^3 - 21y + 12.5 = 0$$

Mediante una calculadora graficadora o una computadora obtenemos la gráfica de la función

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12.5$$

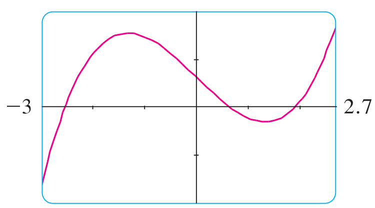


FIGURA 6

como en la figura 6, la ecuación 7 tiene tres raíces reales. Al acercarse a los valores, encontramos las raíces con una aproximación de cuatro cifras decimales:

$$y \approx -2.5452 \qquad y \approx 0.6468 \qquad y \approx 1.8984$$

(Otra opción es aplicar el método de Newton o un buscador de raíces para localizar estos valores.) De acuerdo con la ecuación 6, los valores de x correspondientes están definidos por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2.5}$$

Si $y \approx -2.5452$, entonces x no tiene valores reales correspondientes. Si $y \approx 0.6468$, entonces $x \approx \pm\, 0.8567$. Si $y \approx 1.8984$, entonces $x \approx \pm\, 2.6442$. De este modo se tiene un total de cinco puntos críticos, los cuales se analizan en la tabla siguiente. Todas las cantidades están redondeadas a dos cifras decimales.

Punto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusión
$(0, 0)$	0.00	−10.00	80.00	máximo local
$(\pm 2.64, 1.90)$	8.50	−55.93	2488.72	máximo local
$(\pm 0.86, 0.65)$	−1.48	−5.87	−187.64	punto silla

En las figuras 7 y 8 se dan dos panorámicas de la gráfica de f donde se ve que la superficie se abre hacia abajo. [Esto también se puede ver en la expresión para $f(x, y)$: los términos dominantes son $-x^4 - 2y^4$ cuando $|x|$ y $|y|$ son grandes.] Al comparar los valores de f en sus puntos máximos locales, se ve que el valor máximo absoluto de f es $f(\pm 2.64, 1.90) \approx 8.50$. En otras palabras, los puntos más altos en la gráfica de f son $(\pm 2.64, 1.90, 8.50)$.

TEC Visual 14.7 muestra varias familias de superficies. La superficie de las figuras 7 y 8 es un miembro de una de estas familias.

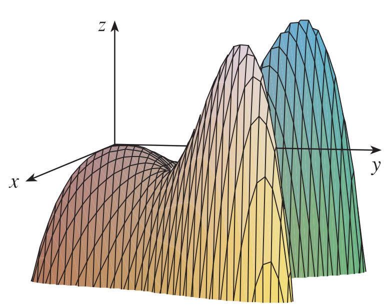


FIGURA 7

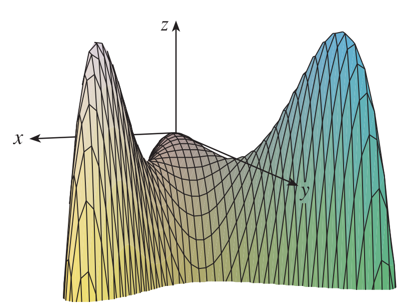


FIGURA 8

Los cinco puntos críticos de la función f del ejemplo 4 se muestra en color rojo en el mapa de curvas de nivel de f en la figura 9.

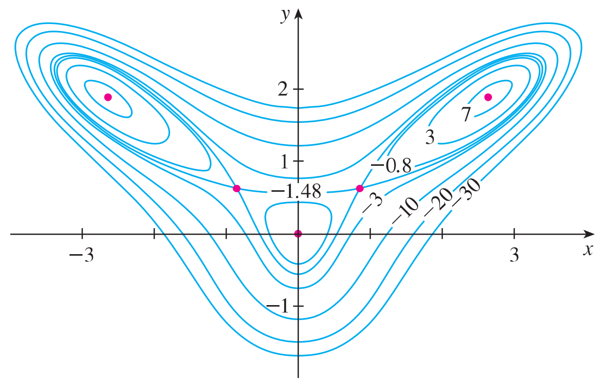


FIGURA 9

V EJEMPLO 5 Calcule la distancia más corta desde el punto $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

SOLUCIÓN La distancia desde cualquier punto (x, y, z) al punto $(1, 0, -2)$ es

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

pero si (x, y, z) se encuentra en el plano $x + 2y + z = 4$, entonces $z = 4 - x - 2y$ y se tiene $d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2}$. Podemos minimizar d minimizando la expresión más sencilla

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

Al resolver las ecuaciones

$$f_x = 2(x-1) - 2(6-x-2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6-x-2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

encontramos que el único punto crítico es $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Puesto que $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$ y $f_{yy} = 10$, tenemos $D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ y $f_{xx} > 0$, de este modo, de acuerdo con la prueba de la segunda derivada f tiene un mínimo local en $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Intuitivamente, se desprende que este mínimo local es en realidad un mínimo absoluto porque debe haber un punto en el plano dado que está más cerca a $(1, 0, -2)$. Si $x = \frac{11}{6}$ y $y = \frac{5}{3}$, entonces

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2} = \tfrac{5}{6}\sqrt{6}$$

El ejemplo 5 se puede resolver también usando vectores. Compare con los métodos de la sección 12.5.

La distancia más corta desde $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$ es $\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

V EJEMPLO 6 Una caja rectangular sin tapa se fabrica con 12 m^2 de cartón. Calcule el volumen máximo de la caja.

SOLUCIÓN Sean x, y y z la longitud, el ancho y la altura de la caja en metros, según se muestra en la figura 10. Entonces, el volumen de la caja es

$$V = xyz$$

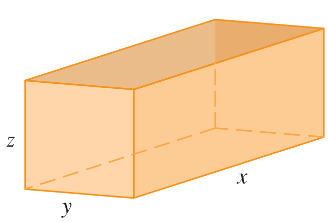


FIGURA 10

Expresamos V como una función de sólo dos variables x y y recurriendo al hecho de que el área de los cuatro lados y el fondo de la caja es

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Al resolver la ecuación para z, obtenemos $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, de modo que la expresión para V se transforma en

$$V = xy\,\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Si V es un máximo, entonces $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, pero $x = 0$ o $y = 0$ da $V = 0$, de modo que debemos resolver las ecuaciones

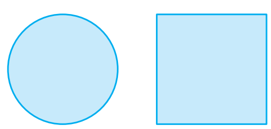
$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Esto implica que $x^2 = y^2$ y $x = y$. (Note que x y y ambas deben ser positivas en este problema.) Si hacemos $x = y$ en cualquier ecuación obtenemos $12 - 3x^2 = 0$, lo cual da $x = 2$, $y = 2$ y $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

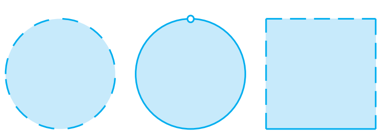
Podríamos utilizar la prueba de la segunda derivada para demostrar que esto da un máximo local de V, o bien, podríamos argumentar simplemente que por la naturaleza física de este problema debe haber un volumen máximo absoluto, lo cual tiene que ocurrir en un punto crítico de V, de modo que se debe presentar cuando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Entonces $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, de modo que el volumen máximo de la caja es 4 m^3.

Valores máximos y mínimos absolutos

En el caso de una función f de una variable el teorema del valor extremo establece que si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor mínimo absoluto y un valor máximo absoluto. Según el método del intervalo cerrado de la sección 4.1, se calculan evaluando f no sólo en los números críticos, sino también en los extremos a y b.



a) Conjuntos cerrados



b) Conjuntos que no son cerrados

FIGURA 11

Hay una situación similar en el caso de las funciones de dos variables. Al igual que un intervalo cerrado contiene sus extremos, un **conjunto cerrado** en $\mathbb{R}^2$ es uno que contiene todos sus puntos frontera. [Un punto frontera de D es un punto (a, b) tal que todo disco con centro (a, b) contiene puntos en D y también puntos que no están en D.] Por ejemplo, el disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

el cual consiste en todos los puntos sobre y dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, es un conjunto cerrado porque contiene todos sus puntos límite, que son los puntos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Pero si aun un punto en la curva límite se omitiera, el conjunto no sería cerrado. Véase figura 11.

Un **conjunto acotado** en $\mathbb{R}^2$ es uno que está contenido dentro de algún disco. En otras palabras, su extensión es finita. Entonces, en términos de conjuntos cerrados y acotados, podemos establecer la siguiente equivalencia del teorema del valor extremo en dos dimensiones.

8 **Teorema del valor extremo para funciones de dos variables** Si f es continua sobre un conjunto D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.

Para determinar los valores extremos que garantizan el teorema 8, note que, según el teorema 2, si f tiene un valor extremo en (x_1, y_1), entonces (x_1, y_1) es un punto crítico de f, o bien, un punto límite o cota de D. Por lo tanto, obtenemos la siguiente generalización del método del intervalo cerrado.

9 Para encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua f sobre un conjunto cerrado y acotado D:

1. Se calculan los valores de f en los puntos críticos de f en D.
2. Se determinan los valores extremos de f sobre la frontera de D.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 7 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ sobre el rectángulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

SOLUCIÓN Puesto que f es una polinomial, es continua sobre el rectángulo cerrado y acotado D, de modo que el teorema 8 establece que hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. De acuerdo con el paso 1 de $\boxed{9}$, primero calculamos los puntos críticos. Estos puntos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

de modo que el único punto crítico es $(1, 1)$, y el valor de f ahí es $f(1, 1) = 1$.

En el paso 2 observamos los valores de f en la frontera de D, que consisten en los cuatro segmentos rectilíneos L_1, L_2, L_3 y L_4 mostrados en la figura 12. Sobre L_1 tenemos $y = 0$ y

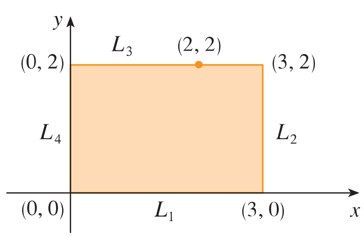


FIGURA 12

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3$$

Ésta es una función creciente de x, de modo que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(3, 0) = 9$. Sobre L_2 tenemos $x = 3$ y

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leq y \leq 2$$

Ésta es una función creciente de y, de modo que su valor máximo es $f(3, 0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3, 2) = 1$. Sobre L_3 tenemos $y = 2$, y

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leq x \leq 3$$

Mediante estos métodos del capítulo 4, o bien, simplemente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, vemos que el valor mínimo de esta función es $f(2, 2) = 0$ y que el valor máximo es $f(0, 2) = 4$. Para finalizar, sobre L_4 tenemos $x = 0$ y

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leq y \leq 2$$

con valor máximo $f(0, 2) = 4$ y valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Por lo tanto, sobre la frontera, el valor mínimo de f es 0 y el máximo es 9.

En el paso 3 de $\boxed{9}$, comparamos estos valores con el valor $f(1, 1) = 1$ en el punto crítico y concluimos que el valor máximo absoluto de f en D es $f(3, 0) = 9$ y el valor mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. En la figura 13 se ilustra la gráfica de f.

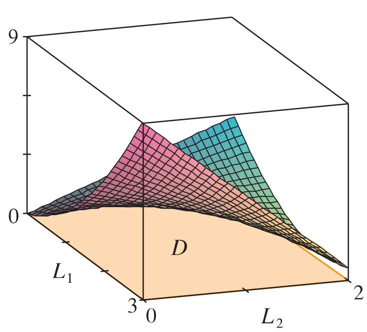


FIGURA 13
$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

Esta sección concluye con la demostración de la primera parte de la prueba de la segunda derivada. La parte b) se demuestra de manera similar.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3, PARTE a) Calculamos la derivada direccional de segundo orden de f en la dirección de $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$. La derivada de primer orden está dada por el teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}} f = f_x h + f_y k$$

Al aplicar este teorema una segunda vez, obtenemos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) &= \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k \\ &= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\ &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \qquad \text{(según el teorema de Clairaut)} \end{aligned}$$

Si completamos el cuadrado en esta expresión, el resultado es

$$\boxed{10} \qquad D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Estamos dando que $f_{xx}(a, b) > 0$ y $D(a, b) > 0$. Pero f_{xx} y $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ son funciones continuas, de modo que hay un disco B con centro (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ y $D(x, y) > 0$ siempre que (x, y) está en B. Por lo tanto, al examinar la ecuación 10, observamos que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ siempre que (x, y) está en B. Esto significa que si C es la curva que se obtiene cuando se interseca la gráfica de f con el plano vertical que pasa por $P(a, b, f(a, b))$ en la dirección de $\mathbf{u}$, entonces C es cóncava hacia arriba sobre un intervalo de longitud 2δ. Esto se cumple en la dirección de todo vector $\mathbf{u}$, de modo que si restringimos a (x, y) en B, la gráfica de f queda por arriba de su plano tangente horizontal en P. Por consiguiente, $f(x, y) \geqslant f(a, \mathrm{b})$, siempre que (x, y) está en B. Esto demuestra que $f(a, b)$ es un mínimo local.

14.7 Ejercicios

1. Suponga que $(1, 1)$ es un punto crítico de una función f con segunda derivada continua. En cada caso, ¿qué puede decir con respecto a f?

a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Supongamos que $(0, 2)$ es un punto crítico de una función g cuyas segundas derivadas son continuas. En cada caso, ¿qué puede decir con respecto a g?

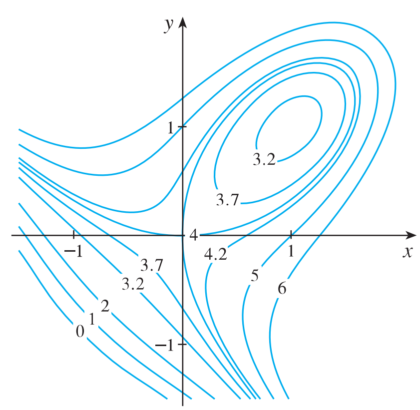
a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

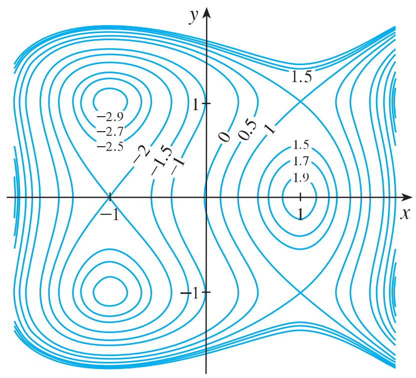
c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3-4 Utilice las curvas de nivel de la figura para pronosticar la ubicación de los puntos críticos de f y si f tiene un punto silla o un máximo local o un mínimo local en cada uno de esos puntos críticos. Explique su razonamiento. Luego aplique la prueba de la segunda derivada para confirmar su pronóstico.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5-18 Calcule los valores máximo y mínimo locales, y punto o puntos sillas de la función. Si dispone de programas para graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y desde otra perspectiva que revele todos los aspectos importantes de la función.

5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$

6. $f(x, y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

7. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

8. $f(x, y) = xe^{-2x^2-2y^2}$

9. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

10. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

12. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2-x^2}$

16. $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

18. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Demuestre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tiene un infinito de puntos críticos y que $D = 0$ en cada uno. A continuación demuestre que f tiene un mínimo local (y absoluto) en cada punto crítico.

20. Demuestre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ tiene valores máximos en $(\pm1, 1/\sqrt{2})$ y valores mínimos en $(\pm1, -1/\sqrt{2})$. Demuestre también que f tiene muchos otros puntos críticos y $D = 0$ en cada uno de ellos. ¿Cuál de ellos da lugar a valores máximos? ¿Y a valores mínimos? ¿Y a puntos de silla?

21-24 Utilice una gráfica o unas curvas de nivel o ambas para estimar los valores máximo y mínimo locales y el punto o los puntos silla de la función. Luego mediante el cálculo encuentre los valores exactos.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4, \; 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

25-28 Mediante una calculadora graficadora o una computadora como en el ejemplo 4 (o el método de Newton o buscador de raíces), determine los puntos críticos de f aproximados a cuatro cifras decimales. Luego clasifique los puntos críticos y determine los puntos más altos o más bajos en la gráfica.

25. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y + 2y$

26. $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

27. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

28. $f(x, y) = 20e^{-x^2-y^2} \operatorname{sen} 3x \cos y, \quad |x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1$

29-36 Determine los valores máximos y mínimos absolutos de f sobre el conjunto D.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, D es la región triangular cerrada con vértices $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

30. $f(x, y) = x + y - xy$, D es la región triangular cerrada con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ y $(4, 0)$.

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2$, $D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, \; y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D es el cuadrilátero cuyos vértices son $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

37. Para funciones de una sola variable es imposible, en el caso de funciones continuas, tener dos máximos locales y ningún mínimo local. Pero si las funciones son de dos variables, sí existen esas funciones. Demuestre que la función

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

tiene sólo dos puntos críticos, pero si tiene máximos locales en ambos puntos. Luego, mediante una computadora grafique con un dominio escogido con todo cuidado y ángulos que permitan ver cómo es posible esto.

38. Si una función de una variable es continua sobre un intervalo y tiene sólo un valor crítico, entonces un máximo local tiene que ser un máximo absoluto. Pero esto no se cumple para funciones de dos variables. Demuestre que la función

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tiene exactamente un punto crítico, y que f tiene un máximo local allí que no es un máximo absoluto. Luego use una computadora para generar una gráfica con un dominio escogido cuidadosamente y perspectiva que permita ver cómo es esto posible.

39. Calcule la distancia más corta desde el punto $(2, 0, -3)$ al plano $x + y + z = 1$.

40. Determine el punto sobre el plano $x - 2y + 3z = 6$ que está más cerca al punto $(0, 1, 1)$.

41. Encuentre los puntos sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

42. Determine los puntos sobre la superficie $y^2 = 9 + xz$ que están más cercanos al origen.

43. Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo

44. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 12 y la suma de cuyos cuadrados es tan pequeña como sea posible.

45. Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en una esfera de radio r.

46. Encuentre las dimensiones de la caja con volumen de 1000 cm^3 que tiene mínima área superficial.

47. Calcule el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine las dimensiones de la caja rectangular con el mayor volumen si el área superficial total es de 64 cm^2.

49. Determine las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo tal que la suma del largo de sus 12 aristas es una constante c.

50. La base de un acuario de volumen V está hecho de pizarra y los lados son de vidrio. Si la pizarra cuesta cinco veces más por unidad de área que el vidrio, determine las dimensiones del acuario que minimizan el costo de los materiales.

51. Una caja de cartón sin tapa debe tener 32 000 cm^3. Calcule las dimensiones que minimicen la cantidad de cartón utilizado.

52. Está en proceso de diseño un edificio rectangular para que minimice las pérdidas de calor. Los muros oriente y poniente pierden calor a razón de 10 unidades/m^2 por día, los muros del norte y del sur pierden 8 unidades/m^2 por día, el piso pierde 1 unidad/m^2 por día, y el techo pierde 5 unidades/m^2 por día. Cada muro debe medir por lo menos 30 m de largo, la altura debe ser por lo menos de 4 m y el volumen debe ser exactamente 4 000 m^3.

a) Determine y grafique el dominio de la pérdida de calor como una función del largo de los lados.

b) Encuentre las dimensiones que minimizan la pérdida de calor. Compruebe tanto los puntos críticos como los puntos en el límite del dominio.

c) ¿Podría diseñar un edificio con menos pérdida de calor si las restricciones de las longitudes de los muros se eliminaran?

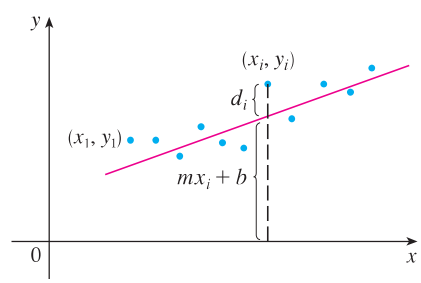
53. Si la longitud de la diagonal de una caja rectangular debe ser L, ¿cuál es el volumen más grande posible?

54. Tres alelos (otras versiones de un gen), A, B y O determinan los cuatro tipos de sangre, a saber, A(AA o AO), B(BB o BO), O(OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción de individuos de una población que llevan dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

donde p, q y r son las proporciones de A, B y O en la población. Use el hecho de que $p + q + r = 1$ para demostrar que P es cuando mucho $\frac{2}{3}$.

55. Suponga que un científico tiene razón en creer que dos cantidades x y y están relacionadas linealmente, es decir, $y = mx + b$, por lo menos en modo aproximado, para algunos valores de m y b. El hombre de ciencia ejecuta un experimento y refina información en la forma de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, y luego grafique los puntos. Los puntos no quedan exactamente sobre una recta, de modo que el científico quiere hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ se "ajuste" a los puntos tanto como sea posible (véase la figura).



Sea $d_i = y_i - (mx_i + b)$ la desviación vertical del punto (x_i, y_i) a partir de la recta. El **método de los mínimos cuadrados** determina m y b de modo que se minimice $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, la suma de los cuadrados de estas desviaciones. Demuestre que, de acuerdo con este método, la recta del mejor ajuste se obtiene cuando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Por lo tanto, la recta se determina al resolver estas dos ecuaciones y determinar las dos incógnitas m y b (véase sección 1.2 en donde se encuentra una explicación y aplicaciones del método de los mínimos cuadrados).

56. Determine una ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y corta el volumen más pequeño en el primer octante.

PROYECTO DE APLICACIÓN DISEÑO DE UN CAMIÓN DE VOLTEO

En este proyecto se estudia la forma y la construcción de un camión recolector de basura. Después se determinan las dimensiones de un contenedor de diseño similar que reduzca al mínimo el costo de construcción.

1. Primero ubique un camión para la basura en su localidad. Estúdielo con todo cuidado y describa todos los detalles de su construcción y determine su volumen. Haga un dibujo del contenedor.
2. Conserve la forma general y el método de construcción, y determine las dimensiones de un contenedor del mismo volumen que debería tener con objeto de minimizar el costo de construcción. Observe las suposiciones siguientes en su análisis:
   - Los lados, la parte posterior y el frente, deben ser de hojas de acero de calibre 12 (0.1046 pulg de espesor), que cuestan 0.70 dólares por pie cuadrado, que incluyen cualquier corte o dobleces necesarios.
   - La base se haría de hojas de acero de calibre 10 (0.1345 pulg de espesor), que cuestan 0.90 dólares por pie cuadrado.
   - Las tapas cuestan casi 50 dólares cada una, sin que importen sus dimensiones.
   - Las soldaduras cuestan alrededor de 0.18 dólares por pie de material y mano de obra combinados.

   Justifique cualquier otra suposición o simplificación planteada de los detalles de construcción.
3. Describa cómo algunas de sus suposiciones o simplificaciones afectarían el resultado final.
4. Si usted fuera contratado como asesor de esta investigación, ¿a qué conclusión llegaría? ¿Recomendaría modificar el diseño del camión? Si así fuera, explique cuáles serían los ahorros que se obtendrían.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO APROXIMACIONES CUADRÁTICAS Y PUNTOS CRÍTICOS

La aproximación del polinomio de Taylor para funciones de una variable que se trata en el capítulo 11, se puede generalizar a funciones de dos o más variables. En esta parte se estudian las aproximaciones cuadráticas para funciones de dos variables, y se usan para reflexionar sobre la prueba de la segunda derivada y clasificar los puntos críticos.

En la sección 14.4 se analiza la linealización de una función f de dos variables en un punto (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Recuerde que la gráfica de L es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ *en* $(a, b, f(a, b))$ y la aproximación lineal correspondiente es $f(x, y) \approx L(x, y)$. La linealización L también se denomina **polinomio de Taylor de primer grado** de f en (a, b).

1. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden en (a, b), entonces el **polinomio de Taylor de segundo grado** de f en (a, b) es

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \end{aligned}$$

   y la aproximación $f(x, y) \approx Q(x, y)$ se llama **aproximación cuadrática** de f en (a, b). Verifique que Q tiene las mismas derivadas parciales de primer y segundo orden que f en (a, b).

2. a) Encuentre los polinomios de Taylor L y Q de primero y segundo grados de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ en (0, 0).
b) Grafique f, L y Q. Comente qué tan bien L y Q se aproximan a f.

3. a) Determine los polinomios de Taylor L y Q de primero y segundo grados para $f(x, y) = xe^y$ en (1, 0).
b) Compare los valores de L, Q y f en (0.9, 0.1).
c) Grafique f, L y Q. Explique qué tan bien L y Q se aproximan a f.

4. En este problema se analiza el comportamiento de la polinomial $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (sin usar la prueba de la segunda derivada), mediante la identificación de la gráfica como un paraboloide.
a) Mediante el procedimiento de completar cuadrados, demuestre que si $a \neq 0$, entonces

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]$$

b) Sea $D = 4ac - b^2$. Demuestre que si $D > 0$ y $a > 0$, entonces f posee un mínimo local en (0, 0).
c) Demuestre que si $D > 0$ y $a < 0$, entonces f tiene un máximo local en (0, 0).
d) Demuestre que si $D < 0$, entonces (0, 0) es un punto silla.

5. a) Suponga que f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas tales que $f(0, 0) = 0$ y (0, 0) es un punto crítico de f. Escriba una expresión para el polinomio de Taylor, Q, de segundo grado de f en (0, 0).
b) ¿Qué puede concluir respecto a Q según el problema 4?
c) En vista de la aproximación cuadrática $f(x, y) \approx Q(x, y)$, ¿qué sugiere el inciso b) en relación con f?

Se requiere calculadora graficadora o computadora

14.8 Multiplicadores de Lagrange

En el ejemplo 6 de la sección 14.7 se obtuvo el valor máximo de la función de volumen $V = xyz$ sujeta a la restricción $2xz + 2yz + xy = 12$, la cual expresa la condición secundaria de que el área superficial era de 12 m^2. En esta sección se trata el método de Lagrange para maximizar o minimizar una función general $f(x, y, z)$ sujeta a una restricción, o condición secundaria, de la forma $g(x, y, z) = k$.

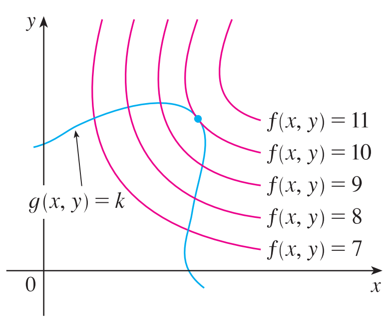


FIGURA 1

TEC Visual 14.8 presenta figuras animadas de la figura 1 tanto para curvas como superficies de nivel.

Es más fácil explicar el fundamento geométrico del método de Lagrange para funciones de dos variables. Para empezar, se calculan los valores extremos de $f(x, y)$ sujeta a una restricción de la forma $g(x, y) = k$. Es otras palabras, buscamos los valores extremos de $f(x, y)$ cuando el punto (x, y) está restringido a quedar en la curva de nivel $g(x, y) = k$. En la figura 1 se muestra esta curva junto con varias curvas de nivel de f. Sus ecuaciones son $f(x, y)= c$, donde $c = 7, 8, 9, 10, 11$. Maximizar $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = k$ es encontrar el valor más grande de c tal que la curva de nivel $f(x, y) = c$ se interseque con $g(x, y) = k$. Al parecer esto sucede cuando las curvas se tocan apenas según la figura 1, es decir, cuando tienen una recta tangente común. (De lo contrario, el valor de c podría incrementarse más.) Esto significa que las rectas normales en el punto (x_0, y_0) donde se tocan son idénticas. De modo que los vectores gradiente son paralelos; es decir, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algún escalar λ.

Esta clase de razonamiento también se aplica al problema de encontrar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. Por consiguiente, el punto (x, y, z) está restringido a estar ubicado en la superficie de nivel S con ecuación $g(x, y, z) = k$. En lugar de las curvas de nivel de la figura 1, consideramos las superficies de nivel $f(x, y, z) = c$ y argumentamos que si el valor máximo de f es $f(x_0, y_0, z_0) = c$, entonces la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ es tangente a la superficie de nivel $g(x, y, z) = k$, y de este modo los vectores gradiente correspondientes son paralelos.

Este argumento intuitivo se puede precisar como sigue. Supongamos que una función f posee un valor extremo en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre la superficie S y sea C una curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ que está sobre S y pasa por P. Si t_0 es el valor del parámetro correspondiente al punto P, entonces $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. La función compuesta $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ representa los valores que f toma en la curva C. Puesto que f tiene un valor extremo en (x_0, y_0, z_0), se infiere que h presenta un valor extremo en t_0, de modo que $h'(t_0) = 0$. Pero si f es derivable, podemos aplicar la regla de la cadena para escribir

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Esto demuestra que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ a toda curva C. Pero de acuerdo con la sección 14.6, el vector gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$, también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ para cada curva. (Véase ecuación 14.6.18.) Esto significa que los vectores gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ deben ser paralelos. Por lo tanto, si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, existe un número λ tal que

1
$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)}$$

Los multiplicadores de Lagrange llevan este nombre en honor al matemático francoitaliano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Véase en la página 286 un esbozo de su biografía.

El número λ de la ecuación 1 se llama **multiplicador de Lagrange**. El procedimiento que se basa en la ecuación 1 es como sigue.

Al deducir el método de Lagrange se supone que $\nabla g \neq \mathbf{0}$. En cada uno de los ejemplos puede comprobar que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos donde $g(x, y, z) = k$. (ver el ejercicio 23 para ver el error si $\nabla g = \mathbf{0}$.

Método de los multiplicadores de Lagrange Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y
$$g(x, y, z) = k$$

b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso a). El más grande de estos valores es el valor máximo de f, el más pequeño es el valor mínimo de f.

Si escribimos la ecuación vectorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ en términos de sus componentes, entonces las ecuaciones en el paso a) se transforman en

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$

Éste es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas x, y, z y λ, pero no es necesario determinar los valores explícitos de λ.

En el caso de funciones de dos variables, el método de los multiplicadores de Lagrange es similar al método que hemos explicado. Para determinar los valores extremos de $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = k$, buscamos valores de x, y y λ tales que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = k$$

Esto equivale a resolver tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

En el primer ejemplo del método de Lagrange, reconsideramos el problema dado en el ejemplo 6 de la sección 14.7.

V EJEMPLO 1 Una caja rectangular sin tapa se hace con 12 m^2 de cartón. Calcule el volumen máximo de esta caja.

SOLUCIÓN Al igual que en el ejemplo 6 de la sección 14.7, sean x, y y z el largo, el ancho y la altura, respectivamente, de la caja medidos en metros. Buscamos maximizar

$$V = xyz$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, buscamos valores de x, y, z y λ tales que $\nabla V = \lambda \nabla g$ y $g(x, y, z) = 12$. De aquí obtenemos las ecuaciones

$$V_x = \lambda g_x$$

$$V_y = \lambda g_y$$

$$V_z = \lambda g_z$$

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

las cuales se transforman en

$$\boxed{2} \qquad yz = \lambda(2z + y)$$

$$\boxed{3} \qquad xz = \lambda(2z + x)$$

$$\boxed{4} \qquad xy = \lambda(2x + 2y)$$

$$\boxed{5} \qquad 2xz + 2yz + xy = 12$$

No hay reglas generales para resolver sistemas de ecuaciones. Algunas veces se requiere ingenio. En el presente ejemplo, se ve que si multiplicamos $\boxed{2}$ por x, $\boxed{3}$ por y, y $\boxed{4}$ por z, entonces los primeros miembros de estas ecuaciones son idénticos. Al hacerlo tenemos

Otro método para resolver el sistema de ecuaciones (2-5) es resolver cada una de las ecuaciones 2, 3 y 4 para λ y luego igualar las expresiones resultantes.

$$\boxed{6} \qquad xyz = \lambda(2xz + xy)$$

$$\boxed{7} \qquad xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$\boxed{8} \qquad xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observe que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaría que $yz = xz = xy = 0$ de acuerdo con $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ y esto contradice $\boxed{5}$. Por lo tanto, de $\boxed{6}$ y $\boxed{7}$, tenemos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

lo cual da $xz = yz$. Pero $z \neq 0$ (ya que $z = 0$ daría $V = 0$), de modo que $x = y$. De acuerdo con $\boxed{7}$ y $\boxed{8}$ tenemos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

lo cual da $2xz = xy$ y de este modo (como $x \neq 0$) $y = 2z$. Si hacemos $x = y = 2z$ en $\boxed{5}$, obtenemos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Puesto que x, y y z son positivas, se tiene que $z = 1$ y por lo tanto $x = 2$ y $y = 2$. Esto concuerda con la respuesta de la sección 14.7.

En términos geométricos, en el ejemplo 2 se pide determinar el punto más alto y el más bajo en la curva C de la figura 2, que está en el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ y directamente arriba de la circunferencia de restricción $x^2 + y^2 = 1$.

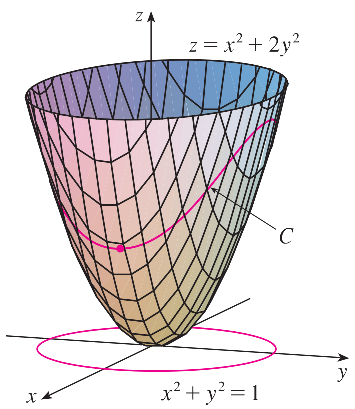


FIGURA 2

V EJEMPLO 2 Determine los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Se pide calcular los valores extremos de f sujetos a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Mediante los multiplicadores de Lagrange, resolvemos las ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ y $g(x, y) = 1$, lo que se puede escribir como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

o bien, como

$$\boxed{9} \qquad 2x = 2x\lambda$$

$$\boxed{10} \qquad 4y = 2y\lambda$$

$$\boxed{11} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

De acuerdo con $\boxed{9}$ tenemos $x = 0$, o bien, $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces $\boxed{11}$ da $y = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ de acuerdo con $\boxed{10}$, de modo que $\boxed{11}$ da $x = \pm 1$. Por lo tanto, f tiene posibles valores extremos en los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Al evaluar f en estos cuatro puntos encontramos que

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

Por lo tanto, el valor máximo de f en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(\pm 1, 0) = 1$. Al verificar en la figura 2, estos valores parecen razonables.

Los principios geométricos en los que se apoya el uso de los multiplicadores de Lagrange tratados en el ejemplo 2, se ilustran en la figura 3. Los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ corresponden a las curvas de nivel que tocan la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

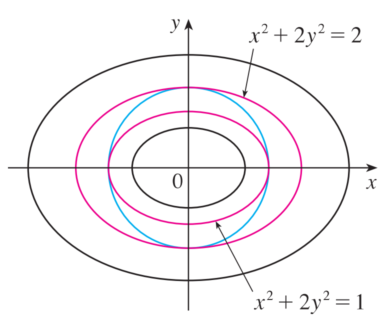


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Calcule los valores extremos $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el procedimiento en (14.7.9), comparamos los valores de f en los puntos críticos con valores en los puntos en la frontera. Puesto que $f_x = 2x$ y $f_y = 4y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Comparamos el valor de f en ese punto con los valores extremos en la frontera del ejemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Por lo tanto, el valor máximo de f sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$.

EJEMPLO 4 Determine los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están más cercanos y más lejanos al punto $(3, 1, -1)$.

SOLUCIÓN La distancia desde un punto (x, y, z) al punto $(3, 1, -1)$ es

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

pero los pasos algebraicos son más sencillos si maximizamos y minimizamos el cuadrado de la distancia:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

La restricción es que el punto (x, y, z) está sobre la esfera, es decir,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acuerdo con el método de los multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$. Esto da

$$\boxed{12} \qquad 2(x - 3) = 2x\lambda$$

$$\boxed{13} \qquad 2(y - 1) = 2y\lambda$$

$$\boxed{14} \qquad 2(z + 1) = 2z\lambda$$

$$\boxed{15} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

La manera más sencilla de resolver estas ecuaciones es expresar x, y y z en términos de λ a partir de $\boxed{12}$, $\boxed{13}$ y $\boxed{14}$, y luego sustituir estos valores en $\boxed{15}$. Según $\boxed{12}$ se tiene

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{o bien} \qquad x(1 - \lambda) = 3 \qquad \text{o bien} \qquad x = \frac{3}{1 - \lambda}$$

En la figura 4 se ilustra la esfera y el punto P más cercano del ejemplo 4 ¿Es capaz de ver cómo determinar las coordenadas de P sin usar el cálculo?

[Observe que $1 - \lambda \neq 0$ porque $\lambda = 1$ es imposible según $\boxed{12}$.] De la misma manera, con $\boxed{13}$ y $\boxed{14}$ se obtiene

$$y = \frac{1}{1 - \lambda} \qquad z = -\frac{1}{1 - \lambda}$$

Por lo tanto, a partir de $\boxed{15}$, tenemos

$$\frac{3^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{1^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1 - \lambda)^2} = 4$$

lo cual da $(1 - \lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$, de modo que

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Estos valores de λ proporcionan los puntos correspondientes (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Es fácil ver que f tiene un valor más pequeño en el primero de estos puntos, de modo que el punto más cercano es $\left(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}\right)$ y el más lejano es $\left(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}\right)$.

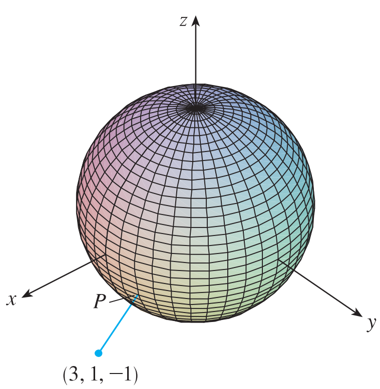


FIGURA 4

Dos restricciones

Suponga que ahora deseamos calcular los valores máximo y mínimo de una función $f(x, y, z)$ sujeta a dos restricciones (condiciones secundarias) de la forma $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$. Desde el punto de vista geométrico, esto significa que estamos buscando los valores extremos de f cuando (x, y, z) está restringida a quedar sobre la curva de intersección C de las superficies de nivel $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$ (véase figura 5).

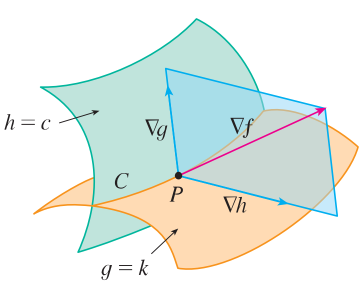


FIGURA 5

Supongamos que f tiene ese valor extremo en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Sabemos, de acuerdo al inicio de esta sección, que ∇f es ortogonal a C en P. Pero también sabemos que ∇g es ortogonal a $g(x, y, z) = k$ y ∇h es ortogonal a $h(x, y, z) = c$, de modo que ∇g y ∇h son ambos ortogonales a C. Esto significa que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está en el plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Suponemos que estos vectores gradiente no son cero y no son paralelos.) Entonces, existen números λ y μ (llamados multiplicadores de Lagrange), tales que

16 $$\boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)}$$

En este caso, el método de Lagrange es para determinar valores extremos resolviendo cinco ecuaciones con cinco incógnitas x, y, z, λ y μ. Estas ecuaciones se obtienen escribiendo la ecuación 16 en términos de sus componentes y usando las ecuaciones de restricción:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

Al intersecar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ el plano $x - y + z = 1$ se forma una elipse (figura 6). En el ejemplo 5 se pregunta el valor máximo de f cuando (x, y, z) está restringido sobre la elipse.

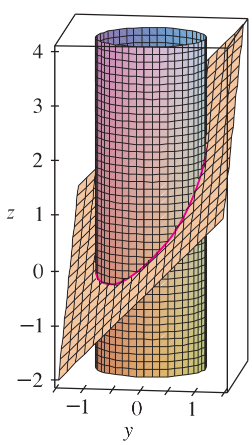


FIGURA 6

V EJEMPLO 5 Determine el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Maximizamos la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeta a las restricciones $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ y $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. La condición de Lagrange es $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que hay que resolver las ecuaciones

17 $$1 = \lambda + 2x\mu$$

18 $$2 = -\lambda + 2y\mu$$

19 $$3 = \lambda$$

20 $$x - y + z = 1$$

21 $$x^2 + y^2 = 1$$

Haciendo $\lambda = 3$ [de $\boxed{19}$] en $\boxed{17}$, obtenemos $2x\mu = -2$, de modo que $x = -1/\mu$. De manera similar, $\boxed{18}$ da $y = 5/(2\mu)$. Al sustituir en $\boxed{21}$ tenemos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

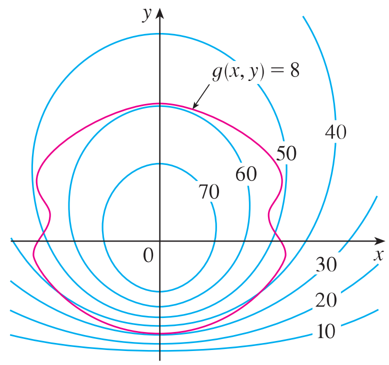
y entonces $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Luego, $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$, y, de acuerdo con $\boxed{20}$, $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Los valores correspondientes de f son

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Por lo tanto, el valor máximo de f sobre la curva dada es $3 + \sqrt{29}$.

14.8 Ejercicios

1. Se ilustran un mapa de contorno de f y una curva cuya ecuación es $g(x, y) = 8$. Estime los valores máximo y mínimo de f sujeta a la restricción $g(x, y) = 8$. Explique su razonamiento.



2. a) Mediante una calculadora graficadora o una computadora, grafique la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En la misma pantalla, trace varias curvas de la forma $x^2 + y = c$ hasta que encuentre dos que justamente toquen la circunferencia. ¿Cuál es la importancia de estos valores de c para estas dos curvas?

b) Mediante los multiplicadores de Lagrange, determine los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x^2 + y$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Compare sus respuestas con las del inciso a).

3-14 Utilizando multiplicadores de Lagrange, encuentre los valores máximo y mínimo de la función sujeta a la restricción o las restricciones dadas.

3. $f(x, y) = x^2 + y^2; \quad xy = 1$

4. $f(x, y) = 3x + y; \quad x^2 + y^2 = 10$

5. $f(x, y) = y^2 - x^2; \quad \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

6. $f(x, y) = e^{xy}; \quad x^3 + y^3 = 16$

7. $f(x, y, z) = 2x + 2y + z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x + y + z = 12$

9. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t; \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;$
$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15-18 Encuentre los valores extremos de f sujetos a ambas restricciones.

15. $f(x, y, z) = x + 2y; \quad x + y + z = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$

16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z;$
$x + y - z = 0, \quad x^2 + 2z^2 = 1$

17. $f(x, y, z) = yz + xy; \quad xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$

18. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x - y = 1, \quad y^2 - z^2 = 1$

19-21 Calcule los valores extremos de f en la región descrita por la desigualdad.

19. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$

20. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$

21. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

22. Considere el problema de maximizar la función $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a la restricción $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

a) Intente usando multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.

b) ¿$f(25, 0)$ da un mayor valor que el del inciso a)?

c) Resuelva el problema graficando la ecuación de restricción y varias curvas de nivel de f.

d) Explique por qué el método de multiplicadores de Lagrange no resuelve el problema.

e) ¿Cuál es la importancia de $f(9, 4)$?

23. Considere el problema de minimizar la función $f(x, y) = x$ sobre la curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (en forma de pera).

a) Intente usando multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.

b) Demuestre que el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ pero la condición de Lagrange $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ no es satisfecha por ningún valor de λ.

c) Explique por qué los multiplicadores de Lagrange no encuentran el valor mínimo en este caso.

SAC **24.** a) Si su sistema algebraico computarizado traza curvas implícitamente definidas, úselo para estimar mediante métodos gráficos los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeta a la restricción $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

b) Resuelva el problema del inciso a) con la ayuda de los multiplicadores de Lagrange. Utilice su sistema algebraico computarizado para resolver numéricamente las ecuaciones. Compare sus respuestas con las del inciso a).

25. La producción total P de un cierto producto depende de la cantidad L de mano de obra utilizada y de la cantidad K de inversión de capital. En las secciones 14.1 y 14.3, analizamos cómo el modelo de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ se infiere de ciertas suposiciones económicas, donde b y α son constantes positivas y $\alpha < 1$. Si el costo de una unidad de mano de obra es m y el costo de una unidad de capital es n, y la compañía puede gastar sólo p dólares como su presupuesto total, la maximización de la producción P está sujeta a la restricción $mL + nK = p$. Demuestre que la producción máxima se presenta cuando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{y} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

26. Refiérase al ejercicio 25. Ahora suponga que la producción está fija en $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, donde Q es una constante. ¿Qué valores de L y K minimizan la función del costo $C(L, K) = mL + nK$?

27. Mediante los multiplicadores de Lagrange, demuestre que el rectángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es un cuadrado.

28. Mediante los multiplicadores de Lagrange, demuestre que el triángulo con área máxima que tiene un perímetro dado p es un triángulo equilátero.
Sugerencia: utilice la fórmula de Herón para el área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

donde $s = p/2$ y x, y, z son las longitudes de los lados.

29–41 Utilice los multiplicadores de Lagrange para obtener otra solución para el ejercicio indicado de la sección 14.7.

29. Ejercicio 39
30. Ejercicio 40
31. Ejercicio 41
32. Ejercicio 42
33. Ejercicio 43
34. Ejercicio 44
35. Ejercicio 45
36. Ejercicio 46
37. Ejercicio 47
38. Ejercicio 48
39. Ejercicio 49
40. Ejercicio 50
41. Ejercicio 53

42. Determine los volúmenes máximo y mínimo de una caja rectangular cuya área superficial es de 1 500 cm^2 y cuyo largo total es de 200 cm.

43. El plano $x + y + 2z = 2$ al intersecar el paraboloide $z = x^2 + y^2$ forma una elipse. Encuentre los puntos de la elipse que son los más cercanos y los más lejanos al origen.

44. El plano $4x - 3y + 8z = 5$ al intersecar el cono $z^2 = x^2 + y^2$ forma una elipse.
a) Grafique el cono, el plano y la elipse.
b) Mediante multiplicadores de Lagrange, encuentre el punto más alto y el más bajo sobre la elipse.

SAC **45-46** Calcule los valores máximo y mínimo de f sujeta a la restricción dada. Utilice un sistema algebraico computarizado para resolver el sistema de ecuaciones que se origina al usar multiplicadores de Lagrange. (Si su sistema algebraico computarizado determina sólo una solución, podría requerir más comandos.)

45. $f(x, y, z) = ye^{x-z}$; $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$, $xy + yz = 1$

46. $f(x, y, z) = x + y + z$; $x^2 - y^2 = z$, $x^2 + z^2 = 4$

47. a) Determine el valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos y $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, donde c es una constante.
b) Deduzca a partir del inciso a) que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos, entonces

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Esta desigualdad establece que la media geométrica de n números no es mayor que la media aritmética de los números. ¿En qué condiciones las dos medias son iguales?

48. a) Maximice $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeta a las restricciones $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.
b) Plantee

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \quad \text{y} \quad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para demostrar que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\,\sqrt{\sum b_j^2}$$

Para números cualesquiera $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Esta desigualdad se conoce con el nombre de desigualdad de Cauchy-Schwarz.

PROYECTO DE APLICACIÓN CIENCIA PARA COHETES

Muchos cohetes, como el *Pegasus XL*, que en la actualidad se usa para lanzar satélites, y el *Saturn V*, que fue el que ayudó a llevar al hombre a la Luna, están diseñados para usar tres etapas en su ascenso al espacio. Una primera etapa impulsa inicialmente al cohete hasta que se agota el combustible, momento en que la etapa se desprende para reducir la masa del cohete. Las etapas segunda y tercera funcionan de manera similar, y su objetivo es colocar a la tripulación y al equipo del cohete en órbita alrededor de la Tierra. (Con este diseño se requieren por lo menos dos etapas con el fin de alcanzar las velocidades necesarias, pero el uso de tres etapas ha demostrado ser una buena opción que combina el costo y el rendimiento.) La meta en este caso es determinar las masas individuales de las tres etapas que se deben diseñar para minimizar la masa total del cohete para que pueda alcanzar la velocidad deseada.

Cortesía de Orbital Sciences Corporation

En el caso de un cohete de una sola etapa que consume combustible a un ritmo constante, el cambio de velocidad que resulta de la aceleración del cohete ha sido modelado por

$$\Delta V = -c \ln\left(1 - \frac{(1 - S)M_r}{P + M_r}\right)$$

donde M_r es la masa del motor del cohete que incluye el combustible inicial, P es la masa de la tripulación y el equipo, S es un *factor estructural* determinado por el diseño del cohete. (Específicamente, es la razón de la masa del vehículo del cohete sin combustible a la masa total del cohete con tripulación y equipo.) Por último, c es la velocidad (constante) de escape con respecto al cohete.

Ahora, considere un cohete de tres etapas y una carga útil de masa A. Suponga que las fuerzas exteriores son insignificantes y que tanto c como S son constantes en cada etapa. Si M_i es la masa de la i-ésima etapa, se puede considerar inicialmente que el motor del cohete tendrá una masa M_1 y su carga útil, es decir, tripulación y equipo, tendrá una masa $M_2 + M_3 + A$; la segunda y la tercera etapas se pueden manejar de manera similar.

1. Demuestre que la velocidad alcanzada después de que las tres etapas se han desprendido,

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A}\right)\right]$$

2. Se desea minimizar la masa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ del motor del cohete sujeta a la restricción de que se alcanza la velocidad deseada v_f del problema 1. El método de los multiplicadores de Lagrange es apropiado aquí, pero difícil de poner en marcha usando las expresiones actuales. Para simplificar, se definen variables N_i, de modo que las ecuaciones de la restricción se podrían expresar como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Puesto que M es difícil de expresar en términos de las N_i deseamos usar una función más sencilla que será minimizada en el mismo lugar que M. Demuestre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_2}{1 - SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1 - S)N_3}{1 - SN_3}$$

y concluya que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1 - S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1 - SN_1)(1 - SN_2)(1 - SN_3)}$$

3. Compruebe que $\ln((M + A)/A)$ es minimizada en el mismo lugar que M; mediante multiplicadores de Lagrange y los resultados del problema 2 determine expresiones para los valores de N_i, donde el mínimo ocurre sujeto a la restricción $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. [*Sugerencia:* aplique las propiedades de los logaritmos para ayudar a simplificar las expresiones.]

4. Plantee una expresión para el valor mínimo de M en función de v_f.

5. Si queremos poner en órbita un cohete de tres etapas a 100 millas sobre la superficie de la Tierra, se requiere una velocidad final de alrededor de 17 500 m/h. Suponga que cada etapa se construye con un factor estructural $S = 0.2$ y una rapidez de escape de $c = 6\,000$ m/h.

a) Encuentre la masa mínima total M de los motores del cohete como una función de A.

b) Determine la masa de cada una de las etapas en función de A. (¡No tienen las mismas dimensiones!)

6. El mismo cohete requeriría una velocidad final de casi 24 700 m/h, con objeto de librarse de la gravedad de la Tierra. Encuentre la masa de cada una de las etapas que minimizaría la masa total de los motores del cohete y que permita que el cohete impulse una sonda de 500 lb hacia el espacio.

PROYECTO DE APLICACIÓN OPTIMIZACIÓN DE TURBINAS HIDRÁULICAS

La Great Northern Paper Company de Millinocket, Maine, opera una estación hidroeléctrica generadora de energía eléctrica en el río Penobscot. El agua es enviada por tubería desde una presa hasta la estación generadora. El caudal del agua es variable y depende de las condiciones externas.

La estación generadora de energía eléctrica cuenta con tres turbinas hidroeléctricas distintas, cada una con una función de potencia (única) y conocida que da la cantidad de energía eléctrica generada como una función del flujo de agua que llega a la turbina. El que entra se puede repartir en volúmenes distintos para cada turbina, de modo que el objetivo es determinar de qué manera distribuir el agua entre las turbinas para lograr la producción máxima total de energía con cualquier caudal.

Al aplicar la evidencia experimental y la *ecuación de Bernoulli*, se determinaron los siguientes modelos cuadráticos para la salida de energía eléctrica de cada turbina, de acuerdo con los caudales admisibles de operación:

$$KW_1 = (-18.89 + 0.1277Q_1 - 4.08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_2 = (-24.51 + 0.1358Q_2 - 4.69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_3 = (-27.02 + 0.1380Q_3 - 3.84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$250 \leqslant Q_1 \leqslant 1110, \quad 250 \leqslant Q_2 \leqslant 1110, \quad 250 \leqslant Q_3 \leqslant 1225$$

donde

$$Q_i = \text{flujo por la turbina } i \text{ en pies cúbicos por segundo}$$

$$KW_i = \text{energía eléctrica generada por turbina } i \text{ en kilowatts}$$

$$Q_T = \text{flujo total por la estación en pies cúbicos por segundo}$$

1. Si las tres turbinas se utilizan, se desea determinar el flujo Q_i para cada turbina que generará la producción máxima total de energía. Las restricciones son que los flujos deben sumar el flujo total que entra y se deben observar las restricciones del dominio dadas. En consecuencia, use multiplicadores de Lagrange para hallar los valores para los flujos individuales (como funciones de Q_T), que maximicen la producción total de energía $KW_1 + KW_2 + KW_3$ sujeta a las restricciones $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$ y a las restricciones del dominio en cada Q_i.

2. ¿Para qué valores de Q_T su resultado es válido?

3. En el caso de un flujo que entra de 2 500 pies^3/s, determine la distribución para las turbinas y compruebe que sus resultados son en efecto un máximo (tratando algunas distribuciones cercanas).

4. Hasta ahora ha supuesto que las tres turbinas están funcionando. ¿Es posible en algunas situaciones que se pueda producir más energía eléctrica usando sólo una turbina? Haga una gráfica de las tres funciones de potencia, y con ayuda de ellas decida si un flujo que entra de 1 000 pies^3/s se debe distribuir entre las tres turbinas, o se debe guiar a sólo una. (Si usted encuentra que sólo una de las turbinas se debe usar, ¿cuál sería?) ¿Cuál si el flujo es de sólo 600 pies^3/s?

5. Tal vez para algunos niveles de flujo sería ventajoso usar dos turbinas. Si el flujo es de 1 500 pies^3/s, ¿cuál par de turbinas recomendaría usar? Mediante los multiplicadores de Lagrange, determine cómo debe distribuir el flujo entre las dos turbinas para maximizar la energía producida. En relación con este flujo, ¿el uso de las dos turbinas es más eficaz que usar las tres turbinas?

6. Si el flujo que entra es de 3 400 pies^3/s, ¿qué le recomendaría a la compañía?

14 Repaso

Verificación de conceptos

1. a) ¿Qué es una función de dos variables?
   b) Describa tres métodos para representar una función de dos variables.

2. ¿Qué es una función de tres variables? ¿Cómo puede representar tal función?

3. ¿Qué significa la expresión siguiente?

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = L$$

   ¿Cómo puede demostrar que este límite no existe?

4. a) ¿Qué significa decir que f es continua en (a, b)?
   b) Si f es continua sobre $\mathbb{R}^2$, ¿qué puede decir con respecto a su gráfica?

5. a) Escriba expresiones para las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ como límites.
   b) ¿Cuál es su interpretación geométrica de $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$? ¿Cuál es su interpretación como razones de cambio?
   c) Si $f(x, y)$ está dada por una fórmula, ¿cómo calcula f_x y f_y?

6. ¿Qué dice el teorema de Clairaut?

7. ¿Cómo encuentra el plano tangente a cada uno de los tipos siguientes de superficies?
   a) Una gráfica de una función de dos variables, $z = f(x, y)$.
   b) Una superficie de nivel de una función de tres variables, $f(x, y, z) = k$.

8. Defina la linealización de f en (a, b). ¿Cuál es la aproximación lineal correspondiente? ¿Cuál es la interpretación geométrica de la aproximación lineal?

9. a) ¿Qué significa decir que f es derivable en (a, b)?
   b) ¿Cómo comprueba regularmente que f es derivable?

10. Si $z = f(x, y)$, ¿qué son las diferenciales dx, dy y dz?

11. Establezca la regla de la cadena para el caso en el que $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una variable. ¿Y si x y y son funciones de dos variables?

12. Si z está definida en forma implícita como una función de x y y mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, ¿cómo determina $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$?

13. a) Escriba una expresión como un límite para la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$. ¿Cómo la interpreta como razón? ¿Cómo la interpreta geométricamente?
    b) Si f es derivable, escriba una expresión para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ en términos de f_x y f_y.

14. a) Defina el vector gradiente ∇f para una función f de dos o tres variables.
    b) Exprese $D_{\mathbf{u}} f$ en términos de ∇f.
    c) Explique la importancia geométrica del gradiente.

15. ¿Qué significan los enunciados siguientes?
    a) f tiene un máximo local en (a, b).
    b) f tiene un máximo absoluto en (a, b).
    c) f tiene un mínimo local en (a, b).
    d) f tiene un mínimo absoluto en (a, b).
    e) f tiene un punto silla en (a, b).

16. a) Si f tiene un máximo local en (a, b), ¿qué puede decir acerca de sus derivadas parciales en (a, b)?
    b) ¿Cuál es el punto crítico de f?

17. Establezca la prueba de la segunda derivada.

18. a) ¿Qué es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué es un conjunto acotado?
    b) Enuncie el teorema del valor extremo para funciones de dos variables.
    c) ¿Cómo determina los valores que garantiza el teorema del valor extremo?

19. Explique cómo funciona el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. ¿Y si hay una segunda restricción $h(x, y, z) = c$?

Examen rápido Verdadero-Falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué, o proporcione un ejemplo que contradiga el enunciado.

1. $f_y(a, b) = \lim_{y\to b} \dfrac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$

2. Existe una función f con derivadas parciales continuas de segundo orden tal que $f_x(x, y) = x + y^2$ y $f_y(x, y) = x - y^2$.

3. $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$

4. $D_{\mathbf{k}} f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$

5. Si $f(x, y) \to L$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de toda recta que pasa por (a, b), entonces $\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = L$.

6. Si $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ existen, entonces f es derivable en (a, b).

7. Si f tiene un mínimo local en(a, b) y f es derivable en (a, b), entonces $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

8. Si f es una función, entonces

$$\lim_{(x,\,y)\to(2,\,5)} f(x, y) = f(2, 5)$$

9. Si $f(x, y) = \ln y$, entonces $\nabla f(x, y) = 1/y$.

10. Si (2, 1) es un punto crítico de f y

$$f_{xx}(2, 1)\, f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$$

entonces f tiene un punto silla en (2, 1).

11. Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$, entonces $-\sqrt{2} \leqslant D_{\mathbf{u}} f(x, y) \leqslant \sqrt{2}$.

12. Si $f(x, y)$ tiene dos máximos locales, entonces f debe tener un mínimo local.

Ejercicios

1-2 Encuentre y trace el dominio de la función.

1. $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$

2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$

3-4 Trace la gráfica de la función.

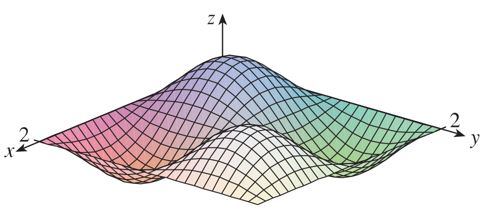
3. $f(x, y) = 1 - y^2$

4. $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$

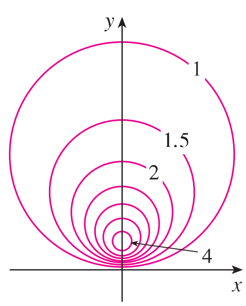
5-6 Grafique varias curvas de nivel de la función.

5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ **6.** $f(x, y) = e^x + y$

7. Elabore un croquis de un mapa de contorno para la función cuya gráfica se muestra.



8. Se muestra un mapa de contorno de una función f. Utilícelo para hacer un esbozo de la gráfica de f.



9-10 Evalúe el límite, o demuestre que no existe.

9. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$ **10.** $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

11. Una plancha de metal está situada en el plano xy y ocupa el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 8$, donde x y y están en metros. La temperatura en el punto (x, y) en la plancha es $T(x, y)$, donde T se mide en grados celsius. Se midieron las temperaturas en puntos con separaciones iguales y se registraron en la tabla.

a) Estime los valores de las derivadas parciales $T_x(6, 4)$ y $T_y(6, 4)$. ¿Cuáles son las unidades?

b) Estime el valor de $D_{\mathbf{u}} T(6, 4)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Interprete el resultado.

c) Estime el valor de $T_{xy}(6, 4)$.

x \ y	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

12. Determine una aproximación lineal para la función de la temperatura $T(x, y)$ del ejercicio 11 cerca del punto (6, 4). Luego úselo para estimar la temperatura en el punto (5, 3.8).

13-17 Encuentre las primeras derivadas parciales.

13. $f(x, y) = (5y^3 + 2x^2y)^8$ **14.** $g(u, v) = \dfrac{u + 2v}{u^2 + v^2}$

15. $F(\alpha, \beta) = \alpha^2 \ln(\alpha^2 + \beta^2)$ **16.** $G(x, y, z) = e^{xz} \operatorname{sen}(y/z)$

17. $S(u, v, w) = u \arctan\left(v\sqrt{w}\right)$

18. La velocidad del sonido que viaja por el mar es una función de la temperatura, salinidad y presión. Está modelada por la función

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T es la temperatura (en grados celsius), S es la salinidad (la concentración de sales en partes por mil, lo cual quiere decir gramos de sólidos disueltos por cada 1000 gramos de agua), y D es la profundidad por abajo de la superficie del mar, en metros. Calcule $\partial C/\partial T$, $\partial C/\partial S$ y $\partial C/\partial D$ cuando $T = 10$ °C, $S = 35$ partes por mil y $D = 100$ m. Explique el significado físico de estas derivadas parciales.

Se requiere calculadora graficadora o computadora

19-22 Determine las segundas derivadas parciales de f.

19. $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$

20. $z = xe^{-2y}$

21. $f(x, y, z) = x^k y^l z^m$

22. $v = r\cos(s + 2t)$

23. Si $z = xy + xe^{y/x}$, demuestre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

24. Si $z = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} t)$, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

25-29 Encuentre las ecuaciones de a) el plano tangente y b) de la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

25. $z = 3x^2 - y^2 + 2x$, $(1, -2, 1)$

26. $z = e^x \cos y$, $(0, 0, 1)$

27. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$, $(2, -1, 1)$

28. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

29. $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$, $(2, -1, 0)$

30. Mediante una computadora, grafique la superficie $z = x^2 + y^4$ y su plano tangente y recta normal en $(1, 1, 2)$ en la misma pantalla. Elija el dominio y el lugar de modo que obtenga una buena vista de los tres objetos.

31. Determine los puntos de la hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + 2y + z = 5$.

32. Encuentre du si $u = \ln(1 + se^{2t})$.

33. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$ en el punto $(2, 3, 4)$ y con ella estime el número $(1.98)^3\sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$.

34. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 5 m y 12 m, y el error posible en la medición es de cuando mucho 0.2 cm en cada uno. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de a) el área del triángulo y b) la longitud de la hipotenusa.

35. Si $u = x^2y^3 + z^4$, donde $x = p + 3p^2$, $y = pe^p$, y $z = p \operatorname{sen} p$, use la regla de la cadena para hallar du/dp.

36. Si $v = x^2 \operatorname{sen} y + ye^{xy}$, donde $x = s + 2t$ y $y = st$, use la regla de la cadena para hallar $\partial v/\partial s$ y $\partial v/\partial t$ cuando $s = 0$ y $t = 1$.

37. Suponga $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_s(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$, $h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_x(3, 6) = 7$, y $f_y(3, 6) = 8$. Calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ cuando $s = 1$ y $t = 2$.

38. Utilice un diagrama de árbol para expresar la regla de la cadena para el caso donde $w = f(t, u, v)$, $t = t(p, q, r, s)$, $u = u(p, q, r, s)$, y $v = v(p, q, r, s)$ son funciones derivables.

39. Si $z = y + f(x^2 - y^2)$, donde f es derivable, demuestre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

40. La distancia x de un lado de un triángulo se incrementa a razón de 3 pulg/s, el largo y de otro de los lados decrece a razón de 2 pulg/s, y el ángulo θ que subtienden se incrementa a razón de 0.05 radianes/s. ¿Qué tan rápido cambia el área del triángulo cuando $x = 40$ pulg, $y = 50$ pulg y $\theta = \pi/6$?

41. Si $z = f(u, v)$, donde $u = xy$, $v = y/x$, y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Si $\cos(xyz) = 1 + x^2y^2 + z^2$, encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

43. Determine el gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2e^{yz^2}$.

44. a) ¿Cuándo es un máximo la derivada direccional de f?
b) ¿Cuándo es un mínimo?
c) ¿Cuándo es 0?
d) ¿Cuándo es la mitad del valor máximo?

45-46 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección indicada.

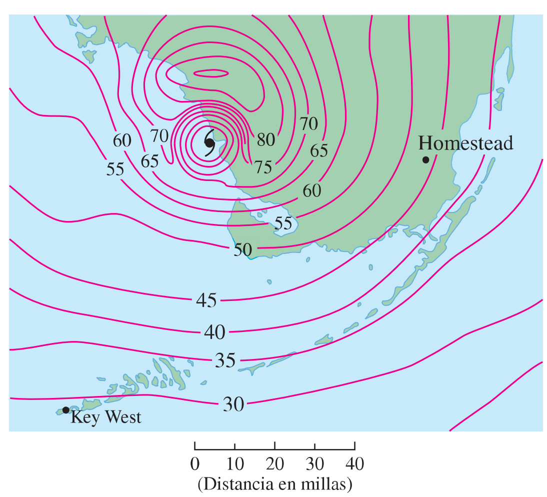
45. Si $f(x, y) = x^2e^{-y}$, $(-2, 0)$, en la dirección hacia el punto $(2, -3)$.

46. Si $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1 + z}$, $(1, 2, 3)$, en la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

47. Determine la razón de cambio máxima de $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ en el punto $(2, 1)$. ¿Cuál es su dirección?

48. Encuentre la dirección en la cual $f(x, y, z) = ze^{xy}$ se incrementa con mayor rapidez en el punto $(0, 1, 2)$. ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

49. El mapa de contorno muestra la velocidad del viento en nudos durante el huracán Andrews del 24 de agosto de 1992. Con él, estime el valor de la derivada direccional de la rapidez del viento en Homestead, Florida, en la dirección del ojo del huracán.



50. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente en el punto $(-2, 2, 4)$ a la curva de intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ y el plano $z = 4$.

51-54 Calcule los valores máximo y mínimo relativos y el punto silla de la función. Si tiene un programa de cómputo para elaborar gráficas tridimensionales, trace la función con un dominio y desde una perspectiva que revele todos los aspectos importantes de la función.

51. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

52. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

53. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

54. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

55-56 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el conjunto D.

55. $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D es la región triangular cerrada en el plano xy con vértices $(0, 0)$, $(0, 6)$ y $(6, 0)$.

56. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$; D es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

57. Use una gráfica, unas curvas de nivel, o ambas, para estimar los valores máximos y mínimos relativos y los puntos silla de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$. Luego mediante el cálculo determine exactamente los valores.

58. Utilice una calculadora o una computadora (el método de Newton o un sistema algebraico computacional), para determinar los puntos críticos de $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$ aproximados a tres cifras decimales. Luego clasifique los puntos críticos y determine el punto más alto en la gráfica.

59-62 Con los multiplicadores de Lagrange, determine los valores máximos y mínimos de f sujeta a las restricciones dadas.

59. $f(x, y) = x^2y; \quad x^2 + y^2 = 1$

60. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

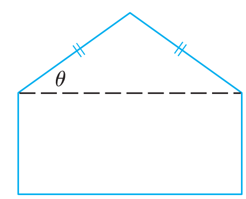
61. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2;$
$x + y + z = 1, \quad x - y + 2z = 2$

63. Encuentre los puntos sobre la superficie $xy^2z^3 = 2$ que son los más cercanos al origen.

64. Un paquete en forma de una caja rectangular se puede enviar a través de U.S. Postal Service si la suma de su largo y el perímetro de una sección transversal perpendicular al largo es 108 pulg como máximo. Calcule las dimensiones del paquete con el volumen más grande que se puede enviar.

65. Se forma un pentágono con un triángulo isósceles y un rectángulo, como se ilustra en la figura. Si el pentágono tiene un perímetro fijo P, determine las longitudes de los lados del pentágono que maximice el área de la figura.



66. Una partícula de masa m se desplaza sobre la superficie $z = f(x, y)$. Sean $x = x(t)$, $y = y(t)$ las coordenadas x y y de la partícula en el tiempo t.
a) Calcule el vector de la velocidad $\mathbf{v}$ y la energía cinética $K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$ de la partícula.
b) Determine el vector de la aceleración $\mathbf{a}$.
c) Sea $z = x^2 + y^2$ y $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t \operatorname{sen} t$. Determine el vector de la velocidad, la energía cinética y el vector de la aceleración.

Problemas adicionales

1. Un rectángulo de largo L y anchura W se corta en cuatro pequeños rectángulos por medio de dos rectas paralelas a los lados. Encuentre los valores máximo y mínimo de la suma de los cuadrados de las áreas de los rectángulos más pequeños.

2. Los biólogos marinos han determinado que cuando un tiburón detecta la presencia de sangre en el agua, nada en la dirección en la cual la concentración de ella se incrementa con mayor rapidez. Con base en ciertas pruebas, la concentración de sangre (en partes por millón), en el punto $P(x, y)$ sobre la superficie del agua de mar es de aproximadamente

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

donde x y y se miden en metros en un sistema de coordenadas rectangulares con la fuente de sangre en el origen.

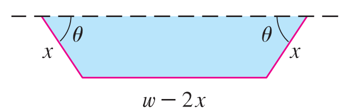
a) Identifique las curvas de nivel de la función de concentración y grafique varios miembros de esta familia junto con una trayectoria que un tiburón sigue hasta donde se encuentra el origen de la sangre.

b) Suponga que un tiburón está en el punto (x_0, y_0) cuando detecta por primera vez la presencia de sangre en el agua. Dé una ecuación de la trayectoria del tiburón planteando y resolviendo una ecuación diferencial.

3. Una pieza larga de acero galvanizado de w pulgadas de ancho se tiene que doblar en forma simétrica de tal manera que queden tres lados rectos y se forme un canalón que desaloje el agua de lluvia. Se muestra una sección transversal en la figura.

a) Determine las dimensiones que permiten un flujo máximo posible; es decir, calcule las dimensiones que dan el área máxima posible de la sección transversal.

b) ¿Sería mejor doblar el metal de tal manera que quede un canalón de sección transversal semicircular que una sección transversal de tres lados?



4. ¿Para qué valores del número r es continua la función

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

sobre $\mathbb{R}^3$?

5. Suponga que f es una función derivable de una variable. Demuestre que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf(y/x)$ se intersecan en un punto común.

6. a) El método de Newton para aproximar una raíz de una ecuación $f(x) = 0$ (véase sección 4.8) se puede adaptar para aproximar una solución de un sistema de ecuaciones $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$. Las superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ se cortan formando una curva que interseca al plano xy en el punto (r, s), que es la solución del sistema. Si una aproximación inicial (x_1, y_1) está cerca de este punto, entonces los planos tangentes a las superficies en (x_1, y_1) se cortan formando una recta que corta al plano xy en el punto (x_2, y_2), el cual debe ser más cercano a (r, s). (Compare con la figura 2 de la sección 4.8.) Demuestre que

$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = y_1 - \frac{f_x g - fg_x}{f_x g_y - f_y g_x}$$

donde f, g y sus derivadas parciales se evalúan en (x_1, y_1). Si continúa con este procedimiento se obtienen aproximaciones sucesivas (x_n, y_n).