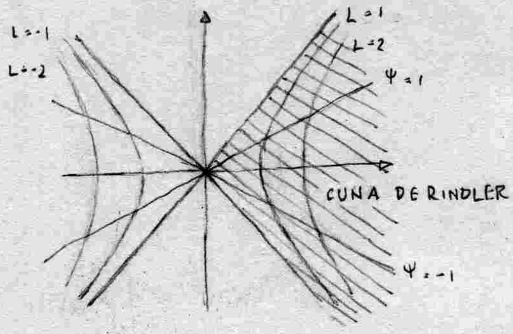
Parcial 1, Relatividad General 2021

Solución



1 a) $$\left(\frac{d\tau}{d\psi}\right)^2 = -\eta_{\alpha\beta}\frac{dZ^\alpha}{d\psi}\frac{dZ^\beta}{d\psi} = \left(\frac{dt}{d\psi}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2$$

$$= L^2\cosh^2\psi - L^2\sinh^2\psi = L^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{d\psi} = L$$

$$\left(\frac{ds}{dL}\right)^2 = \eta_{\alpha\beta}\frac{dZ^\alpha}{dL}\frac{dZ^\beta}{dL} = \left(\frac{dx}{dL}\right)^2 - \left(\frac{dt}{dL}\right)^2 = \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$$

Entonces $s = L$, ya que $s = L = 0$ en el orígen $(t,x) = 0$.

b) $$u^\alpha = \frac{dZ^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{L}\frac{dZ^\alpha}{d\psi} = \begin{bmatrix}\cosh\psi\\ \sinh\psi\end{bmatrix}$$

$$u^{0} = \frac{\partial Y^{0}}{\partial Z^{\alpha}} u^\alpha = \begin{bmatrix}\cosh\psi & \sinh\psi\\ \sinh\psi & \cosh\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cosh\psi_0\\ \sinh\psi_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh(\psi+\psi_0)\\ \sinh(\psi+\psi_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{si } \psi = -\psi_0$$

Entonces el referencial de reposo instantaneo es

$$\begin{bmatrix}t'\\ x'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh\psi_0 & -\sinh\psi_0\\ -\sinh\psi_0 & \cosh\psi_0\end{bmatrix} L \begin{bmatrix}\sinh\psi\\ \cosh\psi\end{bmatrix} = L\begin{bmatrix}\sinh(\psi-\psi_0)\\ \cosh(\psi-\psi_0)\end{bmatrix}$$

Cuando $\psi = \psi_0$ $\begin{bmatrix}t'\\ x'\end{bmatrix} = L\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, así $t' = 0$.

c) $$x'^2 - t'^2 = L^2 \Rightarrow x' = \sqrt{L^2 + t'^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'}\frac{1}{2}\frac{2t'}{\sqrt{L^2+t'^2}} = \frac{1}{\sqrt{L^2+t'^2}} - \frac{1}{2}\frac{t'\,2t'}{(L^2+t'^2)^{3/2}} = \frac{L^2}{(L^2+t'^2)^{3/2}}$$

En $t' = 0$ $\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{1}{L}$. Esto no depende de ψ_0.

Si una parte del cohete mantiene L constante entonces su velocidad en el referencial de reposo x', t' de la punta del cohete en $\psi = \psi_0$ es

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{t'}{\sqrt{L^2+t'^2}} = 0 \quad \text{en } t' = 0$$

En estas coordenadas en $t' = 0$ cada parte ocupa la posicion $x' = L$, con su valor de L.
Así el cohete tiene longitud propia $\Delta s = L_{punta} - L_{cola}$. Esto es independiente de ψ_0.

d) $$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dZ^\alpha\, dZ^\beta = -dt^2 + dx^2$$

$$= -\left(L \cosh\psi\, d\psi + \sinh\psi\, dL\right)^2 + \left(L \sinh\psi\, d\psi + \cosh\psi\, dL\right)^2$$

$$= \left(-L^2 \cosh^2\psi + L^2 \sinh^2\psi\right) d\psi^2 + \left(-\sinh^2\psi + \cosh^2\psi\right) dL^2$$

$$= -L^2\, d\psi^2 + dL^2$$

e) La fase es $e^{i\theta}$ con $\theta = \omega(x-t) = \omega L(\cosh\psi - \sinh\psi) = \omega L e^{-\psi}$

La fase que observa el observador es

$$e^{i\omega L e^{-\psi}} = e^{i\omega L e^{-\tau/L}}$$

1. $$\omega' = -\frac{d\theta}{d\tau} = -\omega L \frac{d e^{-\tau/L}}{d\tau} = \omega e^{-\tau/L}$$

2. El observador nunca ve al cuerpo salir de la cuna de Rindler.

El cuerpo sale de la cuna de Rindler por el borde $x - t = 0$. Esto solo se puede ver desde un punto en el mismo rayo de luz $x - t = 0$ pero para el observador $x - t = L e^{-\psi} = L e^{-\tau/L}$ entonces $x - t = 0 \Rightarrow \tau = \infty$

3. La energía de cada fotón recibido es $\hbar\omega' = \hbar\omega e^{-\tau/L}$. La frecuencia con que se emite un foton es $n = \omega \frac{n}{\omega}$. Entonces la frecuencia con que se reciben es $\omega' \frac{n}{\omega} = n e^{-\tau/L}$. Otra manera de decirlo

$$\omega\, dt_{emision} = \omega'\, d\tau_{recepcion}$$

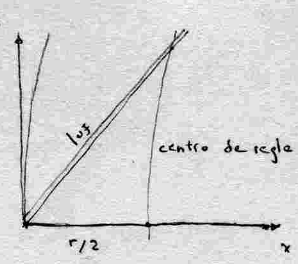
$$n\, dt_{emision} = n'\, d\tau_{recepcion}$$

$\Rightarrow \dfrac{n'}{n} = \dfrac{\omega'}{\omega} = e^{-\tau/L} \Rightarrow$ fotónes por unidad del tiempo τ $\quad n' = n e^{-\tau/L}$

Entonces la energía recibida por unidad de tiempo propio es

$$n'\hbar\omega' = n\hbar\omega\, e^{-2\tau/L}$$

4. El cuerpo sale de la cuna Rindler en $t = x_0$. El último fotón antes se emite en aproximadamente en $t = x_0 - \frac{1}{n}$. Entonces en su linea mundo $x - t = \frac{1}{n}$. Así es recibido en τ tal que $\frac{1}{n} = L e^{-\psi} \Rightarrow \tau = L\psi = L \ln(nL)$



2 a) <u>Solución con cinemática Newtoniana</u>: Consideramos primero la luz emitida por el reloj atras. En el referencial de reposo de la regla en el momento de emision el tiempo entre recepcion de crestes de la onda es $\Delta t_r = \frac{\lambda}{c-v}$ con λ la longitud de onda, y v la velocidad de la regla en el momento de recepción. El tiempo entre emision de las crestas es $\Delta t_e = \frac{\lambda}{c}$. Así la reson entre frecuencia de recepcion y de emisión es

$$\frac{f_r}{f_e} = \frac{\Delta t_e}{\Delta t_r} = \frac{c-v}{c} = 1 - \frac{v}{c}$$

$v = at$, con t el tiempo desde emision hasta recepcion

$$ct = \frac{r}{2} + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow y \equiv \frac{2ct}{r} = 1 + \frac{a}{r}t^2 = 1 + \frac{ar}{4c^2}y^2$$

$$y = 1 + \frac{ar}{4c^2} + 2\left(\frac{ar}{4c^2}\right)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow t = \frac{r}{2c} + O\left(\frac{ar}{c^2}\right)$$

$$\frac{f_r}{f_e} = 1 - \frac{a}{c}\frac{r}{2c} + O\left(\left(\frac{ar}{c^2}\right)^2\right)$$

El mismo analisis se puede repetir para la luz emitida por el reloj addante y se obtiene $\Delta t_r = \frac{\lambda}{c+v}$, $\frac{f_r}{f_e} = 1 + \frac{v}{c}$, con $t = \frac{r}{2c} + O\left(\frac{ar}{c^2}\right)$ todevía

Entonces $$\frac{f_r \text{ addante}}{f_r \text{ atras}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{ar}{c^2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{ar}{c^2}} = 1 + \frac{ar}{c^2}$$

hasta primer orden en $\frac{ar}{c^2}$.

<u>Solución usando cinemática relativista de problema 1</u>: De nuevo consideramos primero la luz emitido por el reloj atras. En un rayo de luz propagando hacia x creciente $x-t$ es constante $x - t = L(\cosh\Psi - \sinh\Psi) = Le^{-\Psi}$. Entonces

$$[Le^{-\Psi}]_{\text{recepcion}} = [Le^{-\Psi}]_{\text{emision}}$$

$$\Rightarrow [\ln L - \Psi]_{\text{recepcion}} = [\ln L - \Psi]_{\text{emision}}$$

$\tau = L\Psi$ así $$\frac{d\tau_r}{d\tau_e} = \frac{L_r}{L_e}\frac{d\Psi_r}{d\Psi_e} = \frac{L_r}{L_e} \Rightarrow \frac{f_r}{f_e} = \frac{L_e}{L_r} = \frac{L - \frac{r}{2}}{L}$$

si se supone que el centro de la regla esta en L. Analizando la luz del reloj adelante de de la misma manera $\frac{f_r}{f_e} = \frac{L_e}{L_r} = \frac{L + \frac{r}{2}}{L}$. Entonces $\frac{f_r \text{ addante}}{f_r \text{ atras}} = \frac{L + r/2}{L - r/2} \simeq 1 + \frac{r}{L}$

$a = \frac{1}{L}$ por 1 b) $\longrightarrow = 1 + ar$

(2) b) 1. $$\delta I = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \delta L \, d\lambda = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{d}{d\lambda} \delta x^\mu \, d\lambda$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right]_{\lambda_i}^{\lambda_f} + \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right] \right) \delta x^\mu \, d\lambda$$

Pero $\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right] - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$, así

$$\delta I = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right]_{\lambda_i}^{\lambda_f}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} = - g_{\mu\nu} \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = - g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Entonces $\delta I = - \left[g_{\mu\nu} \, \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right]_{\lambda_i}^{\lambda_f}$.

2. Sea z_f^α un referencial Lorentziano local de reposo instantaneo del centro de la regla en $\lambda = \lambda_f$. Entonces $\frac{dz_f^\alpha}{d\tau} = \delta^\alpha_0$, y porque $[x^\mu \pm \delta x^\mu]_{\lambda_f}$ son simultaneos en este referencial con $[x^\mu]_{\lambda_f}$, $\delta z_f^0 = 0$. Así

$$\left[g_{\mu\nu} \, \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right]_{\lambda_f} = \left[\eta_{\alpha\beta} \, \delta z_f^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \right]_{\lambda_f} = \left[\eta_{\alpha 0} \, \delta z_f^\alpha \right]_{\lambda_f} = 0$$

De la misma manera $\left[g_{\mu\nu} \, \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right]_{\lambda_i} = 0$.

Entonces $\delta I = 0$. Pero I es justamente el tiempo propio transcurrido por la linea mundo desde λ_i hasta λ_f. Así el tiempo propio transcurrido para los dos relojes es igual.