Parcial 1 IM 2021 8/oct/2021

Yilian Montesino Carmona

Problema 1

Una jugadora de golf lanza una pelota desde el suelo con un ángulo de 45° respecto al plano horizontal, con una velocidad de 60 m/s. Determine:

a) La velocidad de la pelota en el pto. más alto de su trayectoria.

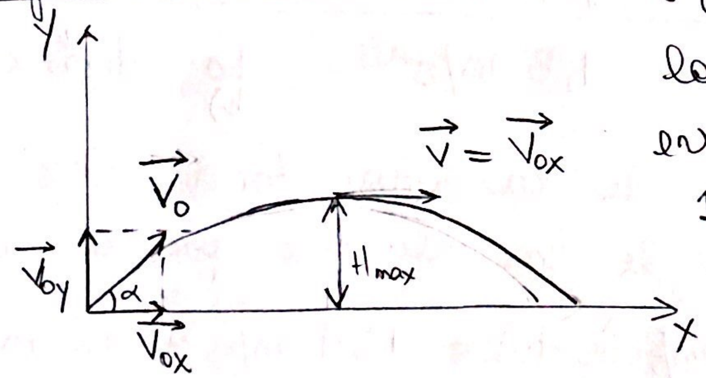
b) Alcance máximo que realiza la pelota.

c) Altura máxima alcanzada por la pelota.

d) Ecuación de la trayectoria seguida por la pelota.

Sol.

Diagrama conceptual → Proyectil: Mov. en 2 dimensiones: O sea, el movimiento que realiza la pelota se puede descomponer en 2 dimensiones:



1) Un mov. horizontal y uniforme (MRU), pues la $\vec{a}_x = 0$. Entonces las ecuaciones que se tienen de este mov. son:

$x = v_{ox} t$; donde $v_{ox} = v_0 \cos\alpha$

v_{ox} es constante, y reescribiendo x se obtiene que $\boxed{x = v_0 \cos\alpha \, t}$.

2) El segundo mov. se da en la vertical y es uniformemente acelerado, o sea, del tipo MRUA, pues en esta dirección se tiene el efecto de la aceleración de la gravedad $\vec{a} = -g\,\hat{j}$. Las ecuaciones que se tienen de este mov. son:

$y = v_{oy}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2$, como $v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\alpha$ podemos reescribir

y como $\boxed{y = v_o \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}g\,t^2}$. → De esta ecuación se infiere que la trayectoria que realiza la pelota es del tipo parábola.

a) Primero debemos calcular

a) el tiempo en que tarda la pelota en llegar al suelo, que lo hallamos a través de la ecuación del mov. vertical para el instante en que $y = 0$. Entonces se obtiene:

$$y = v_o \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

$$0 = v_o \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

$v_o = 60\,m/s$ (dato)

$\alpha = 45°$ (dato)

$y = 0$ (análisis)

$$t = \frac{2\,v_o \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{2(60\,\cancel{m}/\cancel{s})\operatorname{sen}45°}{9{,}8\,\cancel{m}/s^{\cancel{2}}} = 8{,}6\,s \approx 9\,s.$$

Lo utilizamos en b).

a) En el punto más alto de la trayectoria sólo se tiene componente horizontal de la velocidad por lo que:

$$v_{H_{max}} = v_{ox} = v_o \cos\alpha = 60\,m/s\cos(45) = 42{,}4\,m/s \approx 42\,m/s$$

b) El alcance se corresponde con la distancia horizontal recorrida por la pelota (Lo pongo de inciso (a)).

$$X = A = \underbrace{v_o \cos\alpha}_{v_{ox}}\,\underbrace{t}_{\text{hallado al principio que sería el tiempo de vuelo de la pelota}} = 60\,\tfrac{m}{\cancel{s}}\cos(45)\cdot 9\,\cancel{s} = 381{,}8\,m \approx 382\,m$$

c) La altura máxima alcanzada se corresponde con el punto en que $v_y = 0$, y se obtiene a partir de:

$$y = H_{max} = \underbrace{v_0 \operatorname{sen} \alpha}_{v_{0y}} t_H - \frac{1}{2} g t_H^2$$

, donde t_H será la mitad del tiempo en caer (tiempo de vuelo).

$$t_H = \frac{t}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5\ s$$

Sustituimos t_H y obtenemos:

$$H_{max} = 60\ m/s \operatorname{sen} 45 \cdot (4{,}5\ s) - \frac{1}{2} 9{,}8\ m/s^2 (4{,}5\ s)^2 = 190{,}9\ m - 99{,}2\ m$$

$$H_{max} = 91{,}7\ m \approx \underline{\underline{92\ m}}$$

d) La ecuación de la trayectoria la hallamos cuando logramos poner una coordenada en función de la otra, o sea, $y = y(x)$

$$y = v_0 \operatorname{sen} \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = v_0 \cos \alpha t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Sust. x en y:

$$y = \cancel{v_0} \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{x}{\cancel{v_0} \cos \alpha} \right) - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = \underline{\underline{A x - B x^2}}$$

$\downarrow$

Que corresponde a la ecuación de una parábola. Se confirma lo mencionado al ppio.

Si resolvemos con los datos queda que: $y = x - 3 \times 10^{-3} x^2$

Problema 2. Opción 2

Péndulo cónico: Un pequeño cuerpo de masa m se encuentra suspendido de una cuerda de longitud L. Si el cuerpo gira en un círculo horizontal de radio r con rapidez constante V. Suponga que la cuerda barre la superficie de un cono. a) Establezca D.C.L del sistema que se plantea.

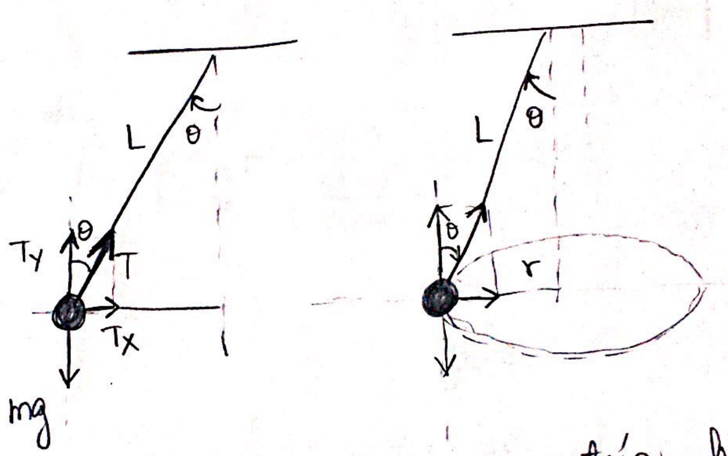
b) ¿La expresión de la velocidad del cuerpo?

c) ¿El tiempo necesario para completar una revolución?

$L = 1\,m \qquad \theta = 25^\circ$

a) Diagrama del cuerpo libre para la masa m

- La fuerza ejercida por la cuerda (T) se ha descompuesto en una componente vertical $T\cos\theta$ y una componente horizontal $T\,\text{sen}\,\theta$ que actúa hacia el centro de rotación



b)

- Como el cuerpo no acelera en la dirección vertical, la componente vertical de T debe equilibrar el peso. Por tanto:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{r}{L} \rightarrow r = L\,\text{sen}\,\theta$$

$$T_x = T\,\text{sen}\,\theta$$

$$T_y = T\cos\theta$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_y - mg = 0$$

$$T_y = mg$$

$$T\cos\theta = mg \quad (1)$$

La fuerza central es proporcionada por la componente $T\,\text{sen}\,\theta$ y aplicando la segunda Ley de Newton se obtiene:

$$\Sigma F_x = ma \quad \text{pero} \quad T_x = T\,\text{sen}\,\theta$$

$$T_x = ma \quad \text{y} \quad a = \frac{V^2}{r} \text{ (aceleración centrípeta)}$$

$$T\,\text{sen}\,\theta = ma = m\frac{V^2}{r} \quad (2)$$

Podemos dividir las ecuación (1) y (2):

$$\frac{\cancel{T}\,\text{sen}\,\theta}{\cancel{T}\cos\theta} = \frac{\cancel{m}\cdot V^2/r}{\cancel{m}\,g} \rightarrow \tan\theta = \frac{V^2}{r\cdot g}$$

Cont. $V = \sqrt{r\,g\tan\theta} = \sqrt{L\,g\,\text{sen}\,\theta\tan\theta}$

c) La bola recorre una distancia de $2\pi r$, o sea, la circunferencia de la trayectoria circular) en un tiempo igual al período de revolución T_P.

$$T_P = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{Lg\,sen\theta\,\tan\theta}} = \frac{2\pi r(\sqrt{Lg\,sen\theta\tan\theta})}{\sqrt{Lg\,sen\theta\tan\theta}\sqrt{Lg\,sen\theta\tan\theta}}$$

$$T_P = \frac{2\pi r(\sqrt{Lg\,sen\theta\tan\theta})}{Lg\,sen\theta\,\tan\theta} \rightarrow sen\theta = \frac{r}{L}$$

$$T_P = \frac{2\pi \cancel{r}(\sqrt{Lg\,sen\theta\,\tan\theta})}{\cancel{L}g\left(\frac{\cancel{r}}{\cancel{L}}\right)\tan\theta} = \frac{2\pi(\sqrt{Lg\,sen\theta\tan\theta})}{g\tan\theta}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{L\cancel{g}\,sen\theta\,\cancel{\tan\theta}}{(g)^2(\tan\theta)^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\,\cancel{sen\theta}}{g\,\frac{\cancel{sen\theta}}{\cos\theta}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

$$\boxed{T_P = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}}$$

Si $L = 1\,m$ y $\theta = 25°$

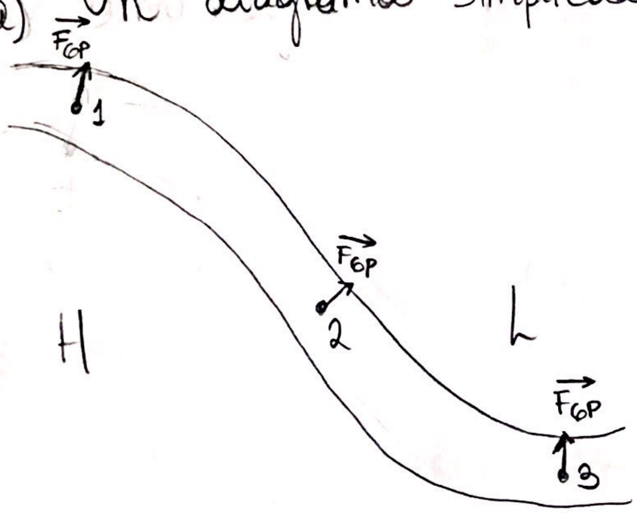
$$T_P = 2\pi\sqrt{\frac{1\,m\cos(25)}{9{,}8}} = 2\pi \cdot 0.30$$

$$= \underline{\underline{1.91\ s}}$$

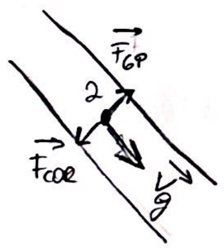
Problema 3

Sol.

a) Un diagrama simplicado de la figura 1 queda:



b)



El viento geostrófico surge del balance entre la fuerza gradiente de presión ($\vec{F}_{GP}$) y la fuerza de Coriolis ($\vec{F}_{COR}$). Como nos encontramos en en hemisferio Norte dicho viento tendrá dirección del NW aproximadamente con se muestra en el diagrama.

En este punto (2) se puede asumir este tipo de equilibrio pues las isóbaras se encuentran casi paralelas, por lo que en este punto es probable que la aceleración sea nula y en consecuencia no cambiará ni la magnitud ni la dirección del viento. Sin embargo en 1 y 3 es probable que esto no pase pues son regiones donde pueden existir cambios en la dirección del viento debido al efecto de la curvatura, dondo son máximos cerca de las vaguadas y las cuñas.

c) Si tenemos que en el pto. 2 la $|v_g| = 21\, m/s$ y la presión decrece a razón de 2×10^{-4} Pa c/ 1 m, esto no indica que la fuerza de gradiente de presión es de $-2 \times 10^{-4}\, Pa/m$, o sea $\frac{\Delta P}{\Delta n} = -2 \times 10^{-3}\, Pa/m$.

La latitud la podemos hallar a través del parámetro de Coriolis $f = 2\Omega \sin\phi$ (1) donde ϕ sería la latitud. El f a su vez lo calculamos para la ecuación de viento geostrófico en coordenadas naturales:

$$|V_g| = \frac{1}{f\rho}\left|\frac{\Delta P}{\Delta n}\right| \quad ; \text{ donde se asume que } \rho = 1\, kg/m^3$$

Despejando f de la ecuación anterior obtenemos:

$$f = \frac{|\Delta P/\Delta n|}{|V_g|} \quad (2)$$

Sustituyendo la expresión de f de la ecuación (2) en la ecuación (1) obtenemos:

$$\frac{|\Delta P/\Delta n|}{|V_g|} = 2\Omega \sin\phi$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400}\,\frac{rad}{s}$$

$$\Omega \approx 7.27 \times 10^{-5}\, \frac{rad}{s}$$

despejamos la latitud (ϕ):

$$\sin\phi = \frac{|\Delta P/\Delta n|}{2\Omega |V_g|} = \frac{|-2 \times 10^{-3}|}{2(7.27 \times 10^{-5})\, 21} = \frac{2 \times \cancel{10^{-3}}}{3.05 \times \cancel{10^{-3}}}$$

$$\sin\phi \approx 0.66$$

$$\phi = \sin^{-1}(0.66)$$

$$\phi = 40.9° \longrightarrow \boxed{\phi \cong 41°}$$

El punto 2 se encuentra aproximadamente a 41° de latitud Norte.