

Actividad 4: Frenado magnético

Laboratorio de Física II

Introducción

En el curso de Laboratorio de Física I estudiamos el fenómeno de la caída de un cuerpo rígido inmerso en un fluido viscoso. En esas condiciones, el cuerpo experimenta las fuerzas de gravedad, empuje de Arquímedes y la fuerza viscosa. Las dos primeras son constantes, pero la última es proporcional a la velocidad de dicho cuerpo¹, como evocamos en la Fig. 1. Por lo tanto, cuanto más rápido cae, mayor es la fuerza viscosa y el cuerpo se acelera hasta alcanzar asintóticamente cierta *velocidad límite* de caída.

En esta oportunidad, veremos un fenómeno análogo, pero en el campo del electromagnetismo, que denominamos “frenado magnético”.

LABORATORIO DE FÍSICA I (2021)

Licenciatura en Biociencias

Actividad Nro. 4:

CAÍDA DE UN RÍGIDO INMERSO EN UN FLUIDO VISCOSO

FUERZA DE ARQUÍMEDES

Consideremos un cuerpo de masa m y volumen V sumergido en un fluido. El cuerpo está sometido a dos fuerzas: su propio peso y el empuje de Arquímedes. Si denotamos la gravedad en la superficie de la tierra con \vec{g} , la fuerza del peso se define como :

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (1)$$

El empuje de Arquímedes está definido como una fuerza en sentido opuesto a la aceleración gravitatoria y de módulo igual al peso del volumen del fluido desalojado por el cuerpo V_s (que equivale al volumen sumergido del cuerpo). Esa fuerza se escribe :

$$\vec{E} = -\rho_{\text{fluido}} V_s \vec{g} \quad (2)$$

CAÍDA DE UNA ESFERA RÍGIDA EN UN FLUIDO VISCOSO

Consideremos ahora que un cuerpo esférico cae completamente inmerso un fluido viscoso (es decir, si el volumen del cuerpo es V , aquí suponemos $V_s = V$). La viscosidad μ se entiende como la resistencia de un fluido a fluir. En el problema de un cuerpo en movimiento uniforme, la viscosidad tiene como efecto una fuerza de rozamiento \vec{F} opuesto al vector velocidad de la esfera y su módulo es proporcional al módulo de dicha velocidad. La ley de Stokes da una expresión de esta fuerza cuando el flujo es laminar, es decir, sin turbulencia :

$$\vec{F} = -\mu 3\pi D \vec{v} \quad (3)$$

donde D es el diámetro de la esfera. Esta fuerza, junto con el empuje, se opone a la aceleración que impone el peso, hasta llegar a un equilibrio entre esas fuerzas (notar que a medida que cae el cuerpo, su velocidad aumenta, por lo que la fuerza de resistencia también, hasta que se equilibran). A partir de ese momento, la velocidad de caída del cuerpo alcanza un valor constante, que es la velocidad límite v . De la relación $\vec{F} + \vec{E} + \vec{P} = m\vec{a} = 0$, donde la velocidad es v , podemos deducir una expresión de la viscosidad:

$$\mu = \frac{(m - \rho_{\text{fluido}} \pi D^3 / 6) g}{3\pi D v} \quad (4)$$

Figura 1: Un poco de nostalgia...

¹Como vimos, esto es estrictamente cierto para números de Reynolds muy pequeños ($Re \ll 1$)

1. Fenómeno de frenado magnético

En esta sección introducimos los fenómenos físicos que, en conjunto, producen el objeto de estudio.

1.1. Campo magnético de un imán

En la Fig. 2 mostramos las líneas de campo magnético generadas por un imán cilíndrico con eje vertical. Por simetría, \mathbf{B} tiene dos componentes: una componente vertical B_z y otra componente radial B_ρ .

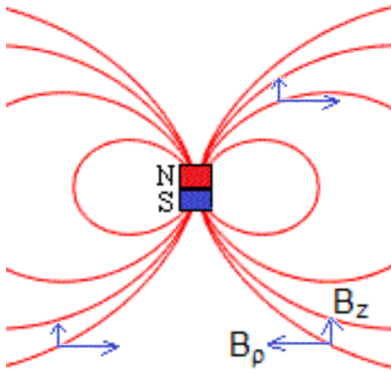


Figura 2: Líneas de campo magnético generadas por un imán.

Podemos asumir que el imán se comporta como un dipolo magnético vertical $\vec{\mu}$, que apunta del polo S al N (en la Fig. 2 es vertical y apunta hacia arriba).

$$B_\rho(\rho, z) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{3\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \quad (1)$$

$$B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \quad (2)$$

donde μ es el módulo del vector momento magnético ($\mu = |\vec{\mu}|$).

1.2. Flujo de campo magnético

En nuestro experimento, tendremos un imán moviéndose sobre el eje de un tubo cilíndrico metálico conductor vertical de radio a . Por esta razón, comenzamos calculando el flujo de campo magnético a través de un área circular horizontal de radio a .

El esquema se muestra en la Fig. 3 y el procedimiento consiste en dividir el círculo en pequeños anillos concéntricos de radio ρ y espesor $d\rho$, calcular el flujo de campo magnético a través de dichos anillos y sumar sobre todos los anillos que cubren el área total de radio a .

Como el área es horizontal, B_ρ no contribuyen a $d\Phi$:

$$d\Phi(\rho, z) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} 2\pi\rho d\rho$$

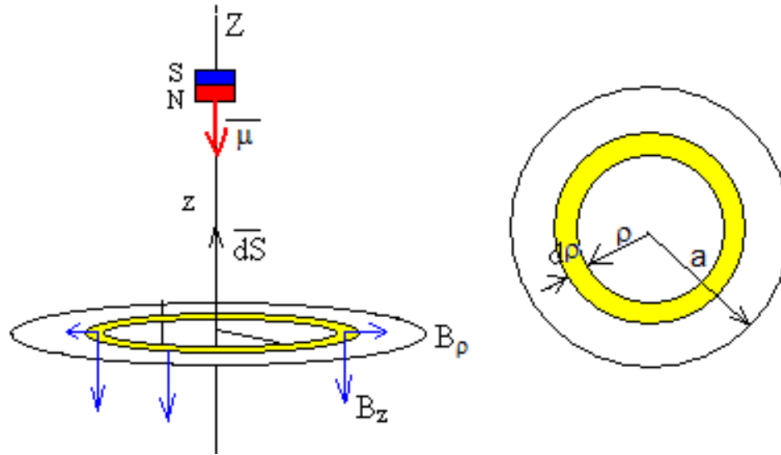


Figura 3: Cálculo del flujo de campo magnético Φ a través de una sección circular horizontal de radio a . Se divide el círculo en anillos circulares de radio ρ y espesor radial infinitesimal $d\rho$, y se calcula el flujo a través de cada uno de ellos, $d\Phi$. El área de cada anillo es $dS = 2\pi\rho d\rho$. Luego se suman los $d\Phi$ (se calcula la integral) para todos los anillos que cubren al círculo y eso nos da Φ .

y el flujo a través del círculo de radio a ubicado a distancia z del imán es $\Phi(z) = \int_0^a d\Phi(\rho, z)$, de donde se obtiene:

$$\Phi(z) = \frac{\mu_0 a^2 \mu}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3)$$

1.3. fem inducida en un tramo del tubo conductor de altura dz

A partir de la ley de Faraday, sabemos que la fem inducida \mathcal{E} por el imán cuando se mueve a velocidad vertical v a una distancia z del aro conductor es:

$$\mathcal{E}(z) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dz} \frac{dz}{dt}$$

Como v es el módulo de la velocidad ($v = |dz/dt|$), si sustituimos la Ec. (3), obtenemos que el módulo de la fem inducida es:

$$\mathcal{E}(z) = \frac{3\mu_0 a^2}{2} \cdot \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \cdot \mu \cdot v \quad (4)$$

1.4. Corrientes inducidas en el tubo conductor

Supongamos que cada sección del cilindro metálico conductor tiene altura dz , radio a y espesor radial e . El material metálico tiene dos propiedades características, una inversa de la otra: la conductividad eléctrica (σ) y la resistividad eléctrica ($r = \frac{1}{\sigma}$). La resistencia eléctrica R de dicha sección del tubo se calcula como: $R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{dA}$, donde $\ell = 2\pi a$ y $dA = e \cdot dz$. Con la ley de Ohm, podemos determinar la corriente que se genera en dicha sección anular de altura dz como:

$$di(z) = \frac{\mathcal{E}(z)}{R} = \frac{\sigma e}{2\pi a} \mathcal{E}(z) dz \quad (5)$$

y por la ley de Lenz, podemos determinar su sentido en cada sección del conductor cilíndrico, como se muestra en las Figs. 4 y 5. Las corrientes di inducen un momento magnético asociado a cada tramo dz del conductor metálico cuyo módulo es $d\mu^c(z) = 2\pi a e \cdot di(z)$. Como vemos en dicha figura, los corrientes que quedan detrás del imán (por encima, ya que el imán se mueve hacia abajo), generan dipolos magnéticos verticales y en la misma dirección del $\vec{\mu}$ del imán (se atraen), mientras que los que están por delante (abajo del imán) inducen un momento magnético hacia abajo, es decir, en dirección opuesta a $\vec{\mu}$, y por lo tanto se repele con el imán que cae. Es decir, cada tramo del cilindro conductor genera una fuerza que se opone al movimiento²

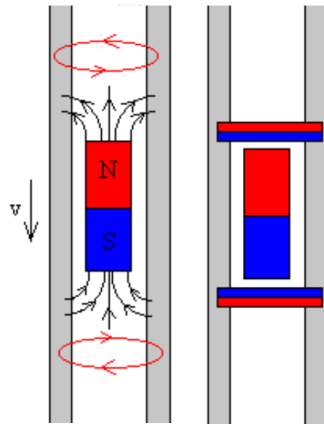


Figura 4: Al moverse el imán, induce corrientes en cada tramo dz del cilindro metálico. Por la ley de Lenz, podemos determinar la dirección de dichas corrientes (figura de la derecha), que se comportan como los imanes ilustrados en la figura de la derecha. Las fuerzas que ejercen estos imanes ficticios son opuestas al movimiento del imán y de módulo proporcional a su velocidad v .

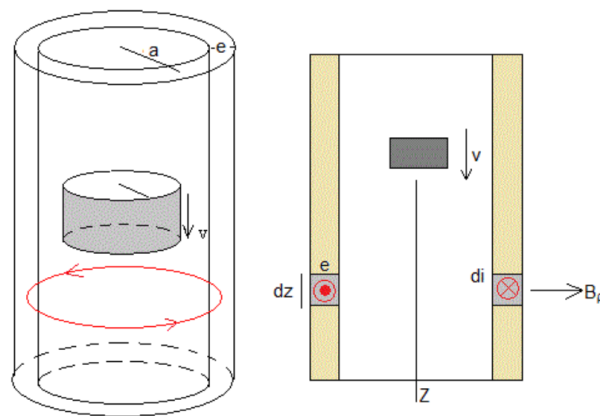


Figura 5: Esquema de las corrientes inducidas en el tubo conductor. Pregunta: ¿dónde ubicaría aquí los polos N y S del imán? las fuerzas que experimenta el imán al caer y que se generan por las corrientes inducidas en el tubo conductor, ¿se oponen aquí al movimiento el imán?

²Notar que estas fuerzas también serían opuestas al movimiento del imán, aunque cayera con el polo S hacia arriba en la Fig. 4. Además, si $\vec{\mu}$ no cayera alineado con el eje del tubo (es decir, si la línea N-S no fuera perfectamente vertical), igualmente se generarían momentos de fuerza (torques) que tienden a alinear $\vec{\mu}$ con la vertical (rotaría el imán hasta alinearse).

Por la ley de Biot-Savart, podemos determinar el módulo de la fuerza $dF(z)$ que cada anillo cilíndrico del tubo conductor (de altura dz) ejerce sobre el imán, a raíz de la corriente que se se ha inducido en él a raíz de la caída del imán ($di(z)$). Por simetría, la componente del campo magnético que va a contribuir a la fuerza, es B_ρ . Su valor, para cada tramo dz es:

$$dF(z) = \frac{9\mu_0\mu^2}{8\pi} \frac{\sigma e v a^3 z^2}{(z^2 + a^2)^5} dz, \quad (6)$$

donde z es la distancia entre el anillo y el imán.

En nuestro experimento vamos a contar con un tubo metálico de largo mucho mayor que las dimensiones del imán de neodimio que cae por su eje. Analizaremos además el tramo en que el imán cae aproximadamente por la mitad de la extensión del tubo, por lo que podemos considerar que el tubo es de largo infinito para simplificar la matemática. Por lo tanto, para calcular la fuerza total de resistencia sobre el imán, debemos sumar la expresión de la Ec. (6) entre $z \rightarrow -\infty$ y $z \rightarrow +\infty$, es decir, el módulo de la fuerza neta de resistencia magnética se calcula como: $F = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(z)$, que conduce a:

$$F = \frac{45\mu_0^2\mu^2}{1024} \frac{\sigma e}{a^4} v \quad (7)$$

Pregunta: ¿Nota Ud. alguna analogía con la fuerza de resistencia que experimenta un cuerpo que cae inmerso en un fluido viscoso? ¿Qué movimiento espera Ud. que experimente el imán durante su caída? ¿Cómo determinaría Ud. el momento magnético del imán a partir de su movimiento?

2. Montaje experimental

El montaje experimental consiste en un imán de neodimio que cuelga atado a un carrito metálico que se apoya sobre un riel horizontal. Entre el carrito y el riel no hay fricción gracias a un “colchón” de aire que se genera entre ellos. El hilo que conecta a las masas se considera inextensible y sin masa, y la polea que cambia la dirección del hilo se considera sin masa ni fricción en su eje. En la Fig. 6 se muestra el diagrama de cuerpo libre. El imán cae dentro de un tubo cilíndrico de aluminio ($\sigma = 37,8 \times 10^6 \Omega^{-1}m^{-1}$; en nuestros cálculos consideraremos a σ sin incertidumbre).

Pregunta: ¿cuál es la relación entre la velocidad del carrito y la velocidad del imán?

Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa y explique cómo se relaciona la velocidad límite de caída del imán con su momento magnético. Preste atención a las cantidades involucradas y piense cómo determinaría sus incertidumbres.

Demuestre que la velocidad límite de caída del imán está dada por:

$$v_{lim} = \frac{mg}{\beta(\mu)}, \quad (8)$$

donde

$$\beta(\mu) = \left(\frac{45}{1024} \frac{\sigma e \mu_0^2}{a^4} \right) \mu^2,$$

siendo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-1} T \cdot m \cdot A^{-1}$ la permeabilidad magnética del vacío, a , e y σ el radio (medio), el espesor y la conductividad eléctrica del tubo metálico respectivamente, y μ y m el momento magnético y la masa del imán respectivamente.

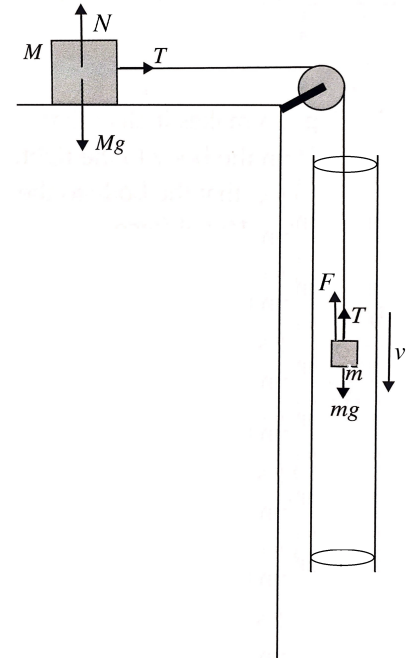


Figura 6: Diagrama de cuerpo libre del sistema de estudio: g es la aceleración gravitatoria (vertical y hacia abajo), M es la masa del carrito, N es la fuerza normal con la superficie donde se apoya, T es la tensión en la cuerda que lo conecta al imán de neodimio de masa m , F es la fuerza magnética que se opone a la caída del imán (Ec. (7)) y v es la velocidad con la que cae dicho imán.

3. Guía de análisis

1. Determinar el momento magnético (μ) del imán de neodimio utilizado en los experimentos. Para ello, medimos $B_z(\rho = 0, z)$ con una punta Hall ubicada a distancia z del imán, para distintos valores de z . A partir de la Ec. (2) (sustituyendo $\rho = 0$ en dicha ecuación) y de los valores recabados experimentalmente, podemos determinar el momento magnético del imán y su incertidumbre. Llamaremos μ_1 a este valor. Recomendamos tomar medidas para distancias mayores a 13 – 14 cm entre la sonda y el imán (para mejorar la aproximación de imán puntual).
2. Procese con el programa Tracker los videos de la caída del imán atado al carrito que se mueve sobre el riel sin rozamiento para determinar la velocidad límite de caída del imán v_{lim} y su incertidumbre. (Nota: utilice el largo del carrito como escala para el procesamiento con Tracker.)
3. Expresa v_{lim} , a y e (ver Ec. (8)) con sus incertidumbres. Respete nuestra convención de expresar la incertidumbre con dos cifras significativas.
4. Determine el momento magnético del imán μ_2 con su incertidumbre³. Para simplificar sus cálculos para la propagación de incertidumbre, desprecie las incertidumbres de a , e y m .
5. Compare el valor de μ_2 respecto al valor μ_1 .

Referencias

- Asimov I., 1987, Enciclopedia biográfica de ciencia y tecnología, 3. Vol. 1234, Alianza Editorial
- Kane J., Sternheim M., 1991, Barcelona. Ed. Reverté
- Maiztegui A. P., Sabato J. A., 1972, in , Introducción a la física 2. pp 539–539
- Serway R. A., Jewett J. W., 2016, Física: electricidad y magnetismo. Cengage Learning

³Le puede ser de utilidad recordar la siguiente derivada: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$.