Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Anillos y Módulos
Segundo semestre de 2021

Repartido 7: Dependencia lineal, sucesiones exactas y producto tensorial

1. Probar que si M y N son módulos libres, entonces $M \oplus N$ es un módulo libre.
2. Probar que si M y N son módulos libres y existen bases B de M y C de N tales que $\#B = \#C$, entonces M y N son isomorfos.
3. Sea A un anillo conmutativo. Probar que $\operatorname{Hom}_A(A^n, A^m)$ es un A-módulo libre de rango mn, para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$.
4. *a*) Probar que $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado como $\mathbb{Z}$-módulo.
   b) Probar que $\mathbb{Q}$ no es libre como $\mathbb{Z}$-módulo.
5. Sea A un anillo conmutativo.
   a) Condieremos A como A-módulo con la acción regular. Probar que si un subconjunto de A es linealmente independiente entonces tiene cardinal 1.
   b) Supongamos que A verifica que todo submódulo de un A-módulo libre es libre. Probar que A es un DIP. ¿Es cierto el recíproco?
6. Sea D un dominio y sea $M \subset D$ un ideal no principal. Consideremos M como D-módulo. Probar que los subconjuntos de M linealmente indepndientes maximales son de cardinal 1 pero M no es libre.
7. Probar que todo módulo sobre un anillo semisimple es semisimple.
8. Sea A un anillo.
   a) Si A es conmutativo y M es un A-módulo generado por el conjunto S entonces $\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{Ann}(S)$.
   b) Probar que si $M \neq \{0\}$ es un A-módulo libre, entonces $Ann(M) = \{0\}$.¿Es cierto el recíproco?
   c) Deducir que si A es conmutativo, entonces todo A-módulo es libre si y sólo si A es un cuerpo.
9. Se considera el anillo de polinomios $\mathbb{Q}[X]$. Sean
$$A = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X] : \ a_0 \in \mathbb{Z} \right\}, \quad I = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X] : \ a_0 = 0 \right\}.$$
   a) Probar que A es un subanillo de $\mathbb{Q}[X]$ y que I es un ideal de A.
   b) Sean $p_1, \dots, p_t \in I$ arbitrarios no nulos. Luego cada p_i se escribe de la forma
$$p_i = \frac{m_i}{n_i} X^{k_i} + (\text{términos de grado mayor que } k_i), \quad \frac{m_i}{n_i} \neq 0, \ k_i \geqslant 1.$$
   Probar que $\frac{1}{2\, n_1 \cdots n_t} X$ está en I pero no en $\sum_{i=1}^{t} A \cdot p_i$.
   c) Probar que I no es finitamente generado como A-módulo.

10. Sea A un anillo cualquiera y $R = \mathrm{End}_A A[X]$ el anillo de endomorfismos de $A[X]$. En lo que sigue consideraremos R como R-módulo (luego la acción es la composición de morfismos).

    Recordar que $A[X]$ es un A-módulo libre de base $\{1, X, X^2, \dots\}$.

    a) Se definen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R$ mediante

    $$\begin{cases} \varepsilon_1(X^{2n}) &= X^n \\ \varepsilon_1(X^{2n+1}) &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varepsilon_2(X^{2n}) &= 0, \\ \varepsilon_2(X^{2n+1}) &= X^n, \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

    1) Probar que si $\varphi \in R$, entonces $\varphi = \varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2$, siendo $\varphi_1, \varphi_2 \in R$ definidas por

    $$\varphi_1(X^n) = \varphi\left(X^{2n}\right), \quad \varphi_2(X^n) = \varphi\left(X^{2n+1}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

    2) Probar que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ es una base de R como R-módulo.

    b) Probar que R admite una base de cardinal n, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$.

11. Dar ejemplos de módulos en los cuales:

    a) Un LI tiene más elementos que un generador.

    b) Un LI tiene la misma cantidad de elementos que una base, pero no es base.

    c) Un generador tiene la misma cantidad de elementos que una base, pero no es base.

    d) El módulo es finitamente generado y tiene un submódulo que no es finitamente generado.

    e) Los módulos M y N son libres, pero $\mathrm{rango}(M \oplus N) \neq \mathrm{rango}(M) + \mathrm{rango}(N)$.

12. Sea A un anillo. Un A-módulo P se dice proyectivo si para todo diagrama sólido en $A-\mathrm{Mod}$ como abajo, donde φ es un epimorfismo, existe un morfismo de A-módulos $\tilde{f} : P \to M$ que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

    Probar que todo A-módulo libre L es proyectivo.

13. Sea A un anillo. Un A-módulo P es proyectivo si y solo si P es sumando directo de un módulo libre.

14. Sea A un anillo conmutativo.

    a) Probar que $M \cong Hom_A(A, M)$ como A-módulos a izquierda.

    b) Probar que $Hom_A(A, A) \cong A$ como anillos.

15. a) Probar que si $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta que se escinde via $\nu : P \to N$, entonces $N = \mathrm{Ker}\,\psi \oplus Im\nu$.

    b) Probar que si $\varphi : M \to N$ y $\psi : N \to M$ son morfismos de módulos tales que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_N$, entonces $M = Im\psi \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$.

16. Sean p, q números primos.

    a) Probar que existe una sucesión exacta corta $E : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_{pq} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_q \longrightarrow 0$ siendo φ el mapa inducido por $m \mapsto qm$ y ψ el mapa inducido por la identidad.

b) Probar que E se escinde si y sólo si $p \neq q$.

17. Probar que la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$ escinde si y sólo si P es un módulo proyectivo.

18. Sea A un grupo abeliano y $m, n > 0$. Probar:

    a) $A \otimes \mathbb{Z}_m \simeq A/mA$.

    b) $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_d$, siendo $d = \mathrm{mcd}(m, n)$. Observar que esto implica $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = \{0\}$, si $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$.

    c) $\mathbb{Q} \otimes A = \{0\}$ si A es de torsión. En particular $\mathbb{Q} \otimes A = \{0\}$ si A es finito.

    d) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$.

    e) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \neq \{0\}$ pero $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{0\}$. En general, si D es un dominio y $k = \mathrm{Frac}(D)$ entonces $k/D \otimes_D k/D = \{0\}$.

19. a) Probar que $2 \otimes \overline{1}$ es 0 como elemento de $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$ pero no es cero en $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$.

    b) Sea $A = \mathbb{Z}[x]$ y sea $I = (2, x) \lhd A$. Probar que $x \otimes x + 2 \otimes 2$ no es un tensor elemental en $I \otimes_A I$.

20. Cambiar el anillo en un producto tensorial puede o no afectarlo:

    a) Probar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$.

    b) Probar que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \not\simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$.

21. (*Extensión de escalares*)

    a) Sea A un anillo y $B \to A$ un subanillo. Observar que A es un B-módulo con el producto. Probar que si M es un B-módulo, entonces tiene sentido definir tiene sentido definir $A \times A \otimes_B M \to A \otimes_B M$ mediante

    $$a \cdot (a' \otimes m) = aa' \otimes m, \quad \forall a, a' \in A,\ m \in M.$$

    Probar que con esta acción $A \otimes_B M$ es un A-módulo.

    b) Observar que tenemos un "morfismo canónico"de B-módulos $1 \otimes \mathrm{id}_M \colon M \to A \otimes_B M$, $m \mapsto 1 \otimes m$. Probar que el par $(A \otimes_B M, 1 \otimes \mathrm{id}_M)$ cumple la siguiente propiedad universal: para todo otro A-módulo N y morfismo de B-módulos $\varphi \colon M \to N$, existe un único $\tilde{\varphi}$ morfismo de A-módulos que hace conmutar el siguiente diagrama: [1]

    $$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1\otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A \otimes_B M \arrow[d, dotted, "\tilde{\varphi}"] \\ & N \end{tikzcd}$$

[1] Esta propiedad universal es la que nos dice que no sólo pudimos convertir a un R-módulo en un S-módulo, sino que además lo estamos haciendo "de la manera óptima". Podríamos haber enunciado este ejercicio en mayor generalidad, como lo hiciéramos en el ejercicio de "restricción de escalares", donde tomamos morfismos arbitrarios y no solamente inclusiones. De esa manera la propiedad universal expresa que los functores de extensión y restricción de escalares son *adjuntos*.