Práctico 4

Problema 1: Teorema de Jebsen - Birkhoff

Simetría esferica implica que se puede elegir coordenadas t, r, θ, ϕ tal que el elemento de linea toma la forma

$$ds^2 = -e^v dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

con v y λ funciones de solo t y r. a) Demuestre que los coeficientes de Christoffel no identicamente cero que corresponden a esta metrica son

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^t_{tt} = \frac{1}{2}\dot{v} & \Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}v' & \Gamma^t_{rr} = \frac{1}{2}e^{\lambda-v}\dot{\lambda} \\
\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}e^{v-\lambda}v' & \Gamma^r_{tr} = \frac{1}{2}\dot{\lambda} & \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}\lambda' \\
\Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-\lambda} & \Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-\lambda}\sin^2\theta & \\
\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} & \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} &
\end{array}$$

y, por supuesto, los simbolos obtenidos intercambiando los dos indices abajo. El $\dot{}$ indica ∂_t, y el $'$ indica ∂_r.
b) Demuestre que los componenentes no identicamente cero del tensor de Riemann son

$$\begin{array}{ll}
R^t_{rtr} = \frac{1}{4}e^{\lambda-v}[2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{v}\dot{\lambda}] - \frac{1}{4}[2v'' + v'^2 - v'\lambda'] & \\
R^t_{\theta t\theta} = -\frac{1}{2}re^{-\lambda}v' & R^t_{\phi t\phi} = \sin^2\theta R^t_{\theta t\theta} \\
R^t_{\theta r\theta} = -\frac{1}{2}re^{-v}\dot{\lambda} & R^t_{\phi r\phi} = \sin^2\theta R^t_{\theta r\theta} \\
R^r_{\theta r\theta} = \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' & R^r_{\phi r\phi} = \sin^2\theta R^r_{\theta r\theta} \\
R^\theta_{\phi\theta\phi} = (1 - e^{-\lambda})\sin^2\theta &
\end{array}$$

y, por supuesto, los simbolos que se obtienen intercambiando los primeros dos indices y/o intercambiando lo ultimos dos.
c) Demuestre que los componentes no identicamente cero del tensor de Ricci son

$$\begin{array}{l}
R_{tt} = -\frac{1}{4}[2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{v}\dot{\lambda}] + \frac{1}{4}e^{v-\lambda}[2v'' + v'^2 - v'\lambda' + \frac{4}{r}v'] \\
R_{rr} = \frac{1}{4}e^{\lambda-v}[2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{v}\dot{\lambda}] - \frac{1}{4}[2v'' + v'^2 - v'\lambda' - \frac{4}{r}\lambda'] \\
R_{tr} = R_{rt} = \frac{1}{r}\dot{\lambda} \\
R_{\theta\theta} = e^{-\lambda}[\frac{r}{2}(\lambda' - v') - 1] + 1 \\
R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}.
\end{array}$$

d) Empieza de resolver las ecuaciones $R_{\mu\nu} = 0$ resolviendo con la ecuacion $R_{tr} = 0$ y luego $0 = \partial_t R_{\theta\theta}$. A partir de estas ecuaciones obtene que $\dot{\lambda} = 0$ y que $v(r,t) = \tilde{v}(r) + \kappa(t)$. Defini una coordenada de tiempo $\tilde{t}$ tal que

$$ds^2 = -e^{\tilde{v}} d\tilde{t}^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Nota que este elemento de linea es estatico.
e) Toma $\tilde{t}$ como el nuevo t y $\tilde{v}$ como el nuevo v. La metrica ahora tiene exactamente la misma forma como en el ansatz estatico y esfericamente simetrico. Resolve los demas ecuaciones de Einstein en vacio. En particular, resolve primero $0 = R_{rr} + e^{\lambda-v}R_{tt}$ y luego $R_{\theta\theta} = 0$. Demuestra que la metrica que queda tambien satisface las demas ecuaciones.

Problema 2: Ley de gravedad de Newton

Newton dedujo que la aceleracion gravitatoria de un cuerpo debido a la atraccion gravitatorio de otro cuerpo es proporcional a la inversa del cuadrado de la distancia entre ellos a partir de la emprica tercera ley de Kepler $r^3/P^2 = \kappa$ para las orbitas de las planetas. Aqui r es la distancia media desde el planeta al Sol, P el periodo de su orbita, y κ un constante que es (casi) igual para todos los planetas.

a) Estudiando orbitas circulares con mecanica Newtoniana, demuestre que la tercera ley de Kepler efectivamente implica que la aceleracion de los planetas es proporcional a $1/r^2$. Trata el caso en que la masa del planeta es despreciable frente al del Sol y trata este ultimo como inmovil.

b) Usando los datos que le radio de la Tierra es 6371 km, la aceleracion de caida libre en la superficie de la Tierra es $9,8\ m/s^2$, y el radio de la orbita de la Luna es 385000 km, calcula el periodo de la orbita de la Luna (aproximando esta por una orbita circular) y comparalo con el valor observado de $27,3$ días (con respecto a las estrellas fijas).

Problemas de Hartle cap. 21

8, 11, 12, 15.

Problemas de Hartle cap. 9

1, 3, 4, 6, 8, 10, 20.

Problemas de Hartle cap. 22

5, 6, 8, 9, 10, 15.

Problema 3: Estres en lineas de campo de EM

Consideramos a los estresses en un campo EM estacionario en espacio tiempo plano. Sean z^α coordenadas de un referencial Lorentziano tal que los campos son independientes del tiempo z^0, y sea Σ una region del espacio $z^0 = 0$ que es vacía salvo por el campo EM. El flujo de estres saliente en una pequenia parte del la superficie $\partial\Sigma$ es la fuerza que ejerce el campo EM en el interior sobre el campo EM en el exterior a traves de esta parte de la superficie.

a) Demuestra que la ecuacion de conservacion de momento implica que la fuerza total es cero.

Considera ahora el caso en que Σ es un tubo angosto con dos "tapas" perpendiculares a las lineas de campo eléctrico (o magnetico, da lo mismo para esta pregunta) y el resto de $\partial\Sigma$ es tangencial a las líneas.

b) Demuestre que el campo en el interior ejerce una presión positiva sobre el exterior a traves de la parte de $\partial\Sigma$ tangencial a las líneas, y una tension a traves de las "tapas" que cortan a las líneas de campo.

De esto se puede concluir que las lineas de campo se comportan como bandas bajo tensión que se repelen mutuamente en las direcciones perpendiculares a si mismas, y que en un campo estacionario las líneas estan en equilibrio mecanico. Este conocimiento es útil a la hora de dibujar diagramas de lineas de campo de manera realistico. (Lo mismo se puede deducir de manera mas elemental considerando la dependencia de la energia del campo en un capacitor de sus dimensiones.)

Problemas de Hartle cap. 12

13, 18, 24, 26, 27.