Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Sucesiones exactas cortas

Notas adaptadas por Mariana Haim para el curso "Anillos y Módulos" 2021.

Durante todo el capítulo A denotará un anillo cualquiera.

0.1. Sucesiones exactas cortas

Definición 0.1.1. Sean M_1, M_2, M_3 A-módulos, φ_1, φ_2 morfismos de A-módulos.
Decimos que $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta (de A-módulos) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- φ_1 es un monomorfismo,
- φ_2 es un epimorfismo,
- $\operatorname{Im} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2$.

Ejemplos 0.1.1.

1. Dados M un A-módulo y $N \subset M$ un submódulo,
$$0 \longrightarrow N \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$
es una sucesión exacta corta.
2. Más en general, si $\varphi : M_1 \to M_2$ es un morfismo de A-módulos, entonces
$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi \hookrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Im} \varphi \longrightarrow 0$$
es una sucesión exacta corta.
3. Sean M_1, M_2 dos A-módulos y $\iota : M_1 \to M_1 \oplus M_2$, $p : M_1 \oplus M_2 \to M_2$ la inyección y la proyección canónica respectivamente. Entonces
$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p} M_2 \longrightarrow 0$$
es una sucesión exacta corta.

Lema 0.1.1 (Lema de los tres). [1] *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo cuyas filas son sucesiones exactas cortas:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"] & N' \arrow[r, "\psi'"] & P' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

1. *Si α y γ son inyectivas, entonces β es inyectiva.*
2. *Si α y γ son sobreyectivas, entonces β es sobreyectiva.*

[1] Este lema se generaliza al que se conoce como *lema de los cinco.*

3. Si α y γ son isomorfismos, entonces β es un isomorfismo.

Demostración. [2]

1. Sea $n \in N$ tal que $\beta(n) = 0$.
$$0 = \psi'(\beta(n)) = \gamma(\psi(n))$$
por conmutatividad del cuadrado derecho. Luego $\psi(n) = 0$ pues γ es inyectiva. Entonces $n \in \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$ por exactitud de la fila de arriba. Por lo tanto existe $m \in M$ tal que $\varphi(m) = n$.
$$0 = \beta(n) = \beta(\varphi(m)) = \varphi'(\alpha(m))$$
por conmutatividad del cuadrado izquierdo. Luego $\alpha(m) = 0$ pues φ' es inyectiva. Entonces $m = 0$ pues α es inyectiva, de donde $\varphi(m) = n = 0$. En conclusión, β es inyectiva.

2. Sea $n' \in N'$. Se tiene que $\psi'(n') \in P'$, luego como γ es sobreyectiva, existe $p \in P$ tal que $\gamma(p) = \psi'(n')$. Como ψ es sobreyectiva, existe $n \in N$ tal que $\psi(n) = p$. Considero $\beta(n) - n'$:
$$\psi'(\beta(n) - n') = \psi'(\beta(n)) - \psi'(n') = \gamma(\psi(n)) - \psi'(n') = \gamma(p) - \psi'(n') = 0$$
por conmutatividad del cuadrado derecho. Entonces $\beta(n) - n' \in \operatorname{Ker}\psi' = \operatorname{Im}\varphi'$ por exactitud de la fila de abajo. Por lo tanto existe $m' \in M'$ tal que $\varphi'(m') = \beta(n) - n'$. Como α es sobre, existe $m \in M$ tal que $\alpha(m) = m'$.
$$\beta(\varphi(m)) = \varphi'(\alpha(m)) = \varphi'(m') = \beta(n) - n'$$
por conmutatividad del cuadrado izquierdo, luego $n' = \beta(n - \varphi(m))$, y $n' \in \operatorname{Im}\beta$. En conclusión, β es sobreyectiva.

3. Es consecuencia directa de las dos partes anteriores. $\square$

Definición 0.1.2.

- Dos sucesiones exactas cortas $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi'} N' \xrightarrow{\psi'} P' \longrightarrow 0$ son *isomorfas* si existe un diagrama conmutativo
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"] & N' \arrow[r, "\psi'"] & P' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
con α, β y γ isomorfismos.

- Dos sucesiones exactas cortas $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi'} N' \xrightarrow{\psi'} P \longrightarrow 0$ son *equivalentes* si existe un isomorfismo $\beta : N \to N'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi'"] & N' \arrow[r, "\psi'"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

[2] Esta demostración es un ejemplo arquetípico de *diagram chasing.*

Observación 0.1.1. Toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$ es isomorfa a una como la del ejemplo 0.1.1.1: en efecto,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\cong"'] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "="'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\ \varphi \arrow[r, hook] & N \arrow[r, "\pi"] & N/\mathrm{Im}\ \varphi \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proposición 0.1.2. *Consideremos una sucesión exacta corta* $E:\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$. *Son equivalentes:*

1. *Existe un morfismo* $\nu : P \to N$ *tal que* $\psi \circ \nu = \mathrm{id}_P$, $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r, "\psi"] & P \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend left, "\nu"] & 0 \end{tikzcd}$

2. *Existe un morfismo* $\eta : N \to M$ *tal que* $\eta \circ \varphi = \mathrm{id}_M$, $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[l, dotted, bend left, "\eta"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$

3. *La sucesión* E *es equivalente a la sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota_M} M \oplus P \xrightarrow{\pi_P} P \longrightarrow 0$. *Es decir, existe un isomorfismo* $\beta : N \to M \oplus P$ *que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota_M"] & M \oplus P \arrow[r, "\pi_P"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostración. ($1 \Rightarrow 3$) Tenemos $\nu : P \to N$ tal que $\psi \circ \nu = \mathrm{id}_P$. La propiedad universal de la suma directa nos dice que existe un único $\delta : M \oplus P \to N$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M \oplus P \arrow[d, dotted, "\delta"] & P \arrow[l, "\iota_P"'] \arrow[dl, "\nu"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

En vista del lema 0.1.1, δ debe ser un isomorfismo. El isomorfismo β buscado es δ^{-1}.

($2 \Rightarrow 3$) Tenemos $\eta : N \to M$ tal que $\eta \circ \varphi = \mathrm{id}_M$. Como la suma directa y el producto directo coinciden para un conjunto de índices finito, podemos usar la propiedad universal del producto directo. Por lo tanto, existe una única $\beta : N \to M \oplus P$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M & M \oplus P \arrow[l, "\pi_M"'] \arrow[r, "\pi_P"] & P \\
& N \arrow[ul, "\eta"] \arrow[u, dotted, "\beta"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Por el lema 0.1.1, β es el isomorfismo buscado.

($3 \Rightarrow 1$) Sea $\nu = \beta^{-1} \circ \iota_P$. Entonces, por conmutatividad del cuadrado derecho:

$$\psi \circ \nu = \pi_P \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \iota_P = \pi_P \circ \iota_P = id_P$$

($3 \Rightarrow 2$) Sea $\nu = \pi_M \circ \beta$. Entonces, por conmutatividad del diagrama izquierdo,

$$\eta \circ \varphi = \pi_M \circ \beta \circ \varphi = \pi_M \circ \iota_M = id_M$$

$\square$

Observación 0.1.2.

1. La condición 3 no sólo expresa que $N \cong M \oplus P$, sino que el isomorfismo hace conmutar dos cuadrados, lo cual es más fuerte (ver ejercicio 7 del práctico 7).

2. De la demostración de $(1 \Rightarrow 3)$ se desprende que, si

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r, "\psi"] & P \arrow[r] \arrow[l, bend left, dotted, "\nu"] & 0 \end{tikzcd}$$

es una sucesión exacta corta que "se escinde via ν", entonces tenemos que el morfismo $\delta : M \oplus P \to N$ definido por $\delta(m,p) = \varphi(m) + \nu(p)$ es un isomorfismo. Además $\operatorname{Im} \varphi \oplus \operatorname{Im} \nu = N$, e $\operatorname{Im} \nu \cong P$.

   Análoga observación vale para la escisión via η.

Definición 0.1.3. Diremos que una sucesión exacta corta *se escinde* si satisface la proposición anterior.

Ejemplo 0.1.1. Toda sucesión exacta corta $E: \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L \longrightarrow 0$, con L libre se escinde. En efecto, alcanza con definir ν en una base de L y, usando la propiedad universal para módulos libres, extenderla a L.
En particular, toda sucesión exacta corta de espacios vectoriales se escinde.