Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Producto Tensorial

Notas adaptadas por Mariana Haim para el curso “Anillos y Módulos” 2021.

0.1. Algo más sobre módulos libres

Definición 0.1.1. El *A-módulo libre generado por un conjunto S* es $L_A(S) = \bigoplus_{i\in S} A_i$ donde $A_i = A$ para todo $i \in S$, considerado como A-módulo con la acción regular. Explícitamente,

$$L_A(S) = \{f : S \to A : f \text{ función, } \operatorname{sop}(f) \text{ finito}\}$$

Observación 0.1.1.

1. Si A no es el anillo trivial y $s \in S$, la *función indicatriz de s* es $\chi_s(t) : S \to A$, definida como $\chi_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$. Observar que $\chi_s \in L_A(S)$ y que la función $S \to L_A(S)$, $s \mapsto \chi_s$ es inyectiva, luego podemos pensar $S \subset L_A(S)$.

2. Dado $f \in L_A(S)$, se tiene que $f = \sum_{i\in S} f(i)\chi_i = \sum_{i\in S} f(i)i$ donde en la última igualdad ya hicimos la identificación recién descrita.

   Esto muestra que S (formalmente, la copia de S en $L_A(S)$) es generador de $L_A(S)$ como A-módulo.

3. Además S es linealmente independiente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i(j) = 0 \quad \forall j \in S \iff a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

   Por lo tanto $L_A(S)$ es un A-módulo libre con base S, justificando su denominación.

Corolario 0.1.1. *Todo A-módulo M es cociente de uno libre.*

Demostración. Sean M un A-módulo y $S \subseteq M$ un generador de M (por ejemplo $S = M$). Entonces por la propiedad universal del A-módulo libre con base S, existe una única φ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook, "\text{inc}"] \arrow[d, hook] & M \\
L_A(S) \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\varphi(s) = s$ para todo $s \in S$. Se tiene que φ es sobreyectiva, pues dado $m \in M$,

$$m = \sum_{i=1}^{k} a_i s_i = \sum_{i=1}^{k} a_i\varphi(s_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} a_i s_i\right)$$

Por lo tanto $M \simeq \frac{L_A(S)}{\ker\varphi}$. □

0.2. Producto tensorial

El producto tensorial es una construcción que permite llevar el álgebra multilineal al contexto lineal. Más en concreto, el producto tensorial de A-módulos permite pensar funciones A-bilineales (y más en general A-multilineales) como funciones A-lineales (es decir, como morfismos de A-módulos).

Asumiremos para el resto del capítulo que A es conmutativo.

Definición 0.2.1. Sean A un anillo conmutativo, M y N dos A-módulos. El *producto tensorial* entre M y N se define como el A-módulo

$$M \otimes_A N := \frac{L_A(M \times N)}{T}$$

donde T es el submódulo de $L_A(M \times N)$ generado por los elementos

1) $(am, n) - a(m, n)$,

2) $(m, an) - a(m, n)$,

3) $(m, n) + (m, n') - (m, n + n')$,

4) $(m, n) + (m', n) - (m + m', n)$,

donde $m, m' \in M, n, n' \in N, a \in A$.

Notamos $m \otimes n$ a la clase de (m, n) y llamamos a estos elementos *tensores elementales*. Además, definimos $\theta : M \times N \to M \otimes_A N$ como $\theta(m, n) := m \otimes n$ para todo $m \in M$, $n \in N$. Es decir, θ es la composición $M \times N \hookrightarrow L_A(M \times N) \xrightarrow{\pi} M \otimes_A N$.

Observación 0.2.1.

1. Todo elemento de $M \otimes_A N$ es *suma* finita de tensores elementales: en efecto, si $x \in M \otimes_A N$, entonces:

$$\begin{aligned} x &= \pi\left(\sum_{i,j=1}^{r,s} a_{ij}(m_i, n_j)\right) = \pi\left(\sum_{i,j=1}^{r,s} a_{ij}\iota(m_i, n_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{r,s} a_{ij}\theta(m_i, n_j) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}m_i \otimes n_j \overset{2)}{=} \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} m_i \otimes (a_{ij}n_j) \overset{4)}{=} \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij}n_j\right)}^{:=n'_i \in N} \\ &= \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n'_i \end{aligned}$$

   En particular, si $\varphi, \psi : M \otimes_A N \to U$ son morfismos de A-módulos, entonces se cumple que $\varphi = \psi$ si y sólo si $\varphi(m \otimes n) = \psi(m \otimes n)$ para todo $m \in M, n \in N$.

2. No es cierto que todo elemento de $M \otimes_A N$ sea de la forma $m \otimes n$ (ver ejercicio 2 del práctico 9).

3. Los tensores elementales no son linealmente independientes. En efecto, se tiene por ejemplo $m \otimes n + m \otimes n' = m \otimes (n + n')$.

4. $0_M \otimes n = 0_{M \otimes_A N} = m \otimes 0_N$ para todo $m \in M, n \in N$.

5. El submódulo T puede ser muy grande; más aún, puede ser todo $L_A(M \times N)$ como muestra el siguiente ejemplo:
$$\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 = \{0\}$$
En efecto, $\bar{1} \otimes \hat{1} = \bar{1} \otimes (4 \cdot \hat{1}) = 4 \cdot (\bar{1} \otimes \hat{1}) = (4 \cdot \bar{1}) \otimes \hat{1} = \bar{0} \otimes \hat{1} = 0$, y por lo tanto $\bar{m} \otimes \hat{n} = (m \cdot \bar{1}) \otimes (n \cdot \hat{1}) = mn \cdot (\bar{1} \otimes \hat{1}) = 0$ para todo $\bar{m} \in \mathbb{Z}_2, \hat{n} \in \mathbb{Z}_3$.

6. La noción de producto tensorial puede generalizarse a anillos no conmutativos, pero se hace en el contexto en que M es un A-módulo a derecha y N es un A-módulo a izquierda. En este caso el producto tensorial resulta apenas un grupo abeliano, a menos que M o N tengan más estructura.

Definición 0.2.2. Sean A un anillo, M, N, U tres A-módulos y $b : M \times N \to U$ una función. Decimos que b es *A-bilineal* si es lineal en cada variable; es decir, si se verifican las siguientes condiciones:

- $b(am + m', n) = ab(m, n) + b(m', n)$,
- $b(m, an + n') = ab(m, n) + b(m, n')$,

para todo $m, m' \in M, n, n' \in N, a \in A$.

A continuación vemos la propiedad universal del producto tensorial. Informalmente, ésta dice que para definir un mapa A-lineal $M \otimes_A N \to U$, basta definir un mapa A-bilineal $M \times N \to U$. Como siempre, no es difícil probar que la propiedad universal caracteriza al objeto a menos de isomorfismo. Por lo tanto, es práctico cuando se trata con el producto tensorial usar siempre su propiedad universal, no apelando por lo general a su definición, que si bien es natural, puede ser un poco enrevesada para manipular.

Teorema 0.2.1 (Propiedad universal del producto tensorial)**.** *Sean A un anillo conmutativo y M, N, U tres A-módulos. Para cada función A-bilineal $b : M \times N \to U$ existe un único morfismo de A-módulos $\tilde{b} : M \otimes_A N \to U$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\theta"'] & U \\
M \otimes_A N \arrow[ur, dotted, "\tilde{b}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Llamemos $\iota : M \times N \to L_A(M \times N)$ a la inclusión. Por la propiedad universal de los módulos libres, existe $b_1 : L_A(M \times N) \to U$ tal que $b_1(m, n) = b(m, n)$ para todo $m \in M, n \in N$, es decir $b_1 \circ \iota = b$.

Ahora bien, es fácil ver que las condiciones de bilinealidad de b implican que $T \subseteq \operatorname{Ker} b_1$ y por tanto, por la propiedad universal del cociente, b_1 induce un morfismo de A-módulos $\tilde{b} : M \otimes_A N \to U$ tal que $\tilde{b} \circ \pi = b_1$.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "b"] \arrow[d, hook, "\iota"] \arrow[dd, bend right=60, "\theta"'] & U \\
L_A(M \times N) \arrow[ur, "b_1"] \arrow[d, "\pi"'] & \\
M \otimes_A N \arrow[uur, dotted, "\tilde{b}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observando que, por construcción, $\tilde{b} \circ \theta = \tilde{b} \circ \pi \circ \iota = b_1 \circ \iota = b$, se tiene que $\tilde{b}$ es el morfismo buscado.

Para ver la unicidad: si existe $h : M \otimes_A N \to U$ tal que $h \circ \theta = b$, entonces como cualquier elemento de $M \otimes_A N$ es suma de tensores elementales,

$$h\left(\sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i\right) = \sum_{i=1}^{r} h(m_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^{r} b(m_i, n_i)$$

de donde h está unívocamente determinada por b. $\square$

La siguiente proposición es una aplicación de la propiedad universal que permite generar algo que podríamos llamar (y formalmente así se llama) *productos tensoriales de morfismos de A-módulos.*

Proposición 0.2.2. *Sean $\varphi : M \to N, \psi : P \to Q$ morfismos de A-módulos. Existe un único morfismo $\varphi \otimes \psi : M \otimes_A P \to N \otimes_A Q$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} M \times P \arrow[r, "\varphi\times\psi"] \arrow[d, "\theta_1"'] & N \times Q \arrow[d, "\theta_2"] \\ M \otimes_A P \arrow[r, dotted, "\varphi\otimes\psi"] & N \otimes_A Q \end{tikzcd}$$

donde $\varphi \times \psi : M \times P \to N \times Q$ se define como $\varphi \times \psi(m, p) = (\varphi(m), \psi(p))$ para todo $m \in M, p \in P$.

Demostración. Queda a cargo del lector probar que $\theta_2 \circ (\varphi \times \psi) : M \times P \to N \otimes_A Q$ es A-bilineal. El resultado se deduce entonces de la propiedad universal del producto tensorial. La función resultante queda definida por $(\varphi \otimes \psi)(m \otimes n) = \varphi(m) \otimes \psi(n), \forall m \in M, n \in N$. $\square$

Observación 0.2.2. No es difícil verificar que esta operación cumple las siguientes propiedades:

- $\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_A N}$,
- Dados f, g, f', g' morfismos de A-módulos como abajo, el diagrama de la derecha conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[d, "f'"'] & & M \otimes_A M' \arrow[d, "f\otimes f'"'] \arrow[dd, bend left=60, "(g\circ f)\otimes(g'\circ f')"] \\ N \arrow[d, "g"'] & N' \arrow[d, "g'"'] & & N \otimes_A N' \arrow[d, "g\otimes g'"'] \\ P & P' & & P \otimes_A P' \end{tikzcd}$$

La siguiente proposición lista propiedades "buenas" del producto tensorial; afirma que es esencialmente (a menos de isomorfismos) asociativo, conmutativo, que tiene neutro y que es distributivo respecto de la suma directa.

Proposición 0.2.3. *Sean A un anillo conmutativo y M, N, P A-módulos. Entonces*

1. $(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P)$,
2. $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$,
3. $M \otimes_A A \cong A \otimes_A M \cong M$,

4. $M \otimes_A (N \oplus P) \cong (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A P)$.

Demostración. La estrategia para probar estos isomorfismos es siempre la misma: construir con la propiedad universal un morfismo, y análogamente se construye un morfismo en el otro sentido que resulta ser su inversa.

1. Para cada $p \in P$, la función $F_p : M \times N \to M \otimes_A (N \otimes_A P)$ definida por $F_p(m, n) = m \otimes (n \otimes p)$ es A-bilineal y por lo tanto induce un morfismo de A-módulos, $\hat{F}_p : M \otimes_A N \to M \otimes_A (N \otimes_A P)$ de A-módulos.

   Por otra parte, la función $F : (M \otimes_A N) \times P \to M \otimes_A (N \otimes_A P)$ definida como $F(m \otimes n, p) = \hat{F}_p(m \otimes n)$ es A-bilineal y por lo tanto induce un morfismo de A-módulos $\tilde{F} : (M \otimes_A N) \otimes_A P \to M \otimes_A (N \otimes_A P)$ que resulta ser un isomorfismo (su inversa se define análogamente).

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_A N) \times P \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\theta"'] & M \otimes_A (N \otimes_A P) \\
(M \otimes_A N) \otimes_A P \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

   Observar que es $\tilde{F}((m \otimes n) \otimes p) = m \otimes (n \otimes p)$.

2. La función $\tau : M \times N \to N \otimes_A M$ definida por $\tau(m, n) = n \otimes m$ es A-bilineal y por tanto induce un morfismo $\tilde{\tau} : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ de A-módulos que resulta ser un isomorfismo (su inversa se define análogamente).

   Observar que es $\tilde{\tau}(m \otimes n) = n \otimes m$.

3. La función $b : M \times A \to M$, definida por $b(m, a) = am$ es A-bilineal y por tanto induce un morfismo $\tilde{b} : M \otimes_A A \to M$ de A-módulos que resulta ser un isomorfismo (con inversa que lleva $m \in M$ en $m \otimes 1_A$).

   Observar que es $\tilde{b}(m \otimes a) = am$.

4. La función $f : M \times (N \oplus P) \to (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A P)$, $f(m, n + p) = (m, n) + (m, p)$ es A-bilineal y por tanto induce un morfismo $\tilde{f} : M \otimes_A (N \oplus P) \to (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A P)$ de A-módulos.

   Observar que es $\tilde{f}(m \otimes (n, p)) = (m \otimes n, m \otimes p)$.

   Por otro lado, las funciones $g_1 : M \times N \to M \otimes_A (N \oplus P)$ y $g_2 : M \times P \to M \otimes_A (N \oplus P)$ definidas por $g_1(m, n) = m \otimes n$, $g_2(m, p) = m \otimes p$ son A-bilineales y por tanto inducen morfismos $\hat{g}_1 : M \otimes_A N \to M \otimes_A (N \oplus P)$ y $\hat{g}_2 : M \otimes_A P \to M \otimes_A (N \oplus P)$ de A-módulos.

   A partir de éstos se construye, con la propiedad universal de la suma directa, un morfismo de A-módulos $G : (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A P) \to M \otimes_A (N \oplus P)$ que resulta ser el inverso de $\tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A N \arrow[r] \arrow[dr, "\hat{g}_1"'] & (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A P) \arrow[d, dotted, "G"] & M \otimes_A P \arrow[l] \arrow[dl, "\hat{g}_2"] \\
& M \otimes_A (N \oplus P) &
\end{tikzcd}$$

   Observar que es $G(m \otimes n, m' \otimes p) = m \otimes (n, 0) + m' \otimes (0, p)$. □

Observación 0.2.3. En realidad hemos probado que el producto tensorial es distributivo respecto de sumas directas *finitas*. Análogamente se prueba que existen isomorfismos $(\bigoplus M_i) \otimes_A P \xrightarrow{\cong} \bigoplus (M_i \otimes_A P)$ y $M \otimes_A (\bigoplus P_i) \xrightarrow{\cong} \bigoplus (M \otimes_A P_i)$.

Si bien los tensores elementales no son linealmente independientes, se puede probar que a partir de bases de M y N se construye una base (formada por tensores elementales) de $M \otimes_A N$.

Proposición 0.2.4. *Sean M y N dos A-módulos libres con bases respectivas $B = \{b_i\}_{i \in I}$, $B' = \{b'_j\}_{j \in J}$. Entonces:*

- *$M \otimes_A N$ es libre,*
- *$X = \{b_i \otimes b'_j \mid i \in I, j \in J\}$ es base de $M \otimes_A N$.*

Demostración. Probaremos directamente la segunda afirmación (de la cual se deduce la primera). Veamos primero que X genera $M \otimes_A N$.

Todo elemento $u \in M \otimes_A N$ es de la forma $u = \sum_{k=1}^{K} m_k \otimes n_k$. Ahora bien, para cada k se tiene $m_k = \sum_i \lambda_{ki} b_i, n_k = \sum_j \mu_{kj} b'_j$, donde ambas sumas involucran una cantidad finita de elementos (los coeficientes no nulos son sólo una cantidad finita). Por lo tanto:

$$u = \sum_{k,i,j} \lambda_{ki} \mu_{kj} b_i \otimes b'_j.$$

de donde X es generador de $M \otimes_A N$.

Veamos que X es linealmente independiente. Tenemos $M = \bigoplus_i Ab_i$, $N = \bigoplus_j Ab'_j$. Entonces por la observación 0.2.3, $M \otimes_A N \cong \bigoplus_{i,j} \left(Ab_i \otimes_A Ab'_j \right)$.

Además $Ab_i \otimes_A Ab'_j \cong A \otimes_A A \cong A$, mediante $b_i \otimes b'_j \mapsto 1 \otimes 1 \mapsto 1 \cdot 1 = 1$.

Se tiene entonces que $M \otimes_A N \simeq \bigoplus_{i,j} A$ y X se corresponde con la base canónica de $\bigoplus_{i,j} A$ mediante el isomorfismo. Por lo tanto como un isomorfismo lleva bases en bases, debe ser X una base de $M \otimes_A N$. □

El siguiente corolario es inmediato.

Corolario 0.2.5. *Si M y N son libres,* $\operatorname{rg}(M \otimes_A N) = \operatorname{rg}(M) \operatorname{rg}(N)$.

Corolario 0.2.6. *Si V y W son $\Bbbk$-espacios vectoriales y $v \in V, w \in W$ son no nulos, entonces $v \otimes w \neq 0$.*

Demostración. Como los conjuntos $\{v\}$ y $\{w\}$ son linealmente independientes en V y W respectivamente, se extienden a bases. El elemento $v \otimes w$ forma parte entonces de una base de $V \otimes_{\Bbbk} W$ y en particular es no nulo. □