Electromagnetismo (2021)

Práctico 6

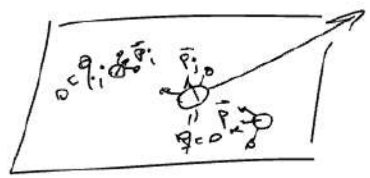
Campos eléctricos en la materia

Veníamos viendo los campos $\vec{E}$ producidos por las cargas,
- → Laplace, Poisson
- → Desarrollo Mult.
- → Ley de Gauss
- → $\nabla \times \vec{E} = 0$ (electrostática) $\Rightarrow \exists\, \varphi \,/\, \vec{E} = -\nabla\varphi$

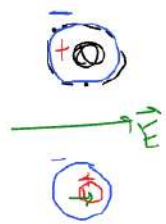
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \left(= -\dfrac{d\Phi_B}{dt} \right)$

→ Ahora nos centramos en describir como responden los materiales a los campos eléctricos y como son los campos que producen los materiales

Un mat.



otro tipo



$$\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{\vec{p}_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \simeq 0$$

si: ordenamiento aleatorio

$$\vec{P} \equiv \text{"momento dip por unidad de vol"} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i \in \Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}$$

pero siempre hay un número grande de dipolos/cargas dentro de ΔV

$$\vec{E}_{mat}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V} \frac{-\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3\vec{r}\,' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\partial V} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^2\vec{r}\,'$$

$$-\nabla\cdot\vec{P} = \rho_b \qquad \vec{P}\cdot\hat{n} = \sigma_b$$

$$\vec{P} = \vec{f}(\vec{E})$$ Ley constitutiva

lineal

$$\vec{P} = \cancel{\vec{f}}(0) + \chi_e\cdot\vec{E} + \cancel{o(\vec{E})}^{0}$$

0

Aleatoriedad

° neutralidad

$$\chi_{e_{ij}} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial E_j}\right|_{\vec{E}=0} = \begin{cases} \delta_{ij}\chi_e & \text{si el material es isotropo} \\ \ldots \end{cases}$$

linéales e isótropos

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \vec{E}}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} + \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

mat $\vec{P} \neq 0$

Vacío $\vec{P} = 0$

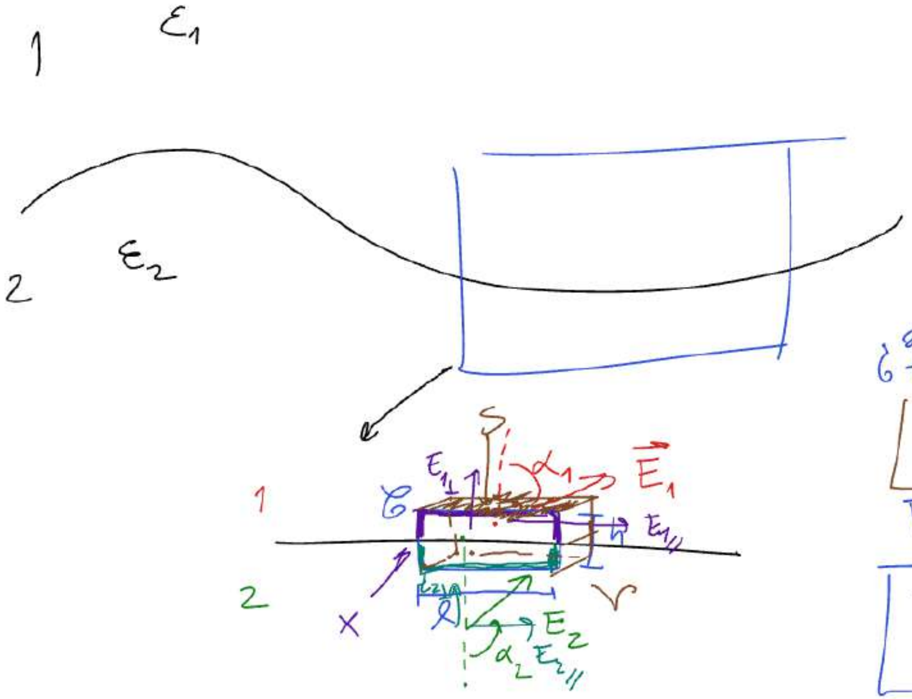
$$\nabla \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f}$$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

Trabajar el comport. electrostático de los mat.

1. Dos medios dieléctricos con permitividad ϵ_1 y ϵ_2 están separados por una frontera libre de cargas. La intensidad del campo eléctrico en la frontera (del lado del medio 1) tiene módulo E_1 forma un ángulo α_1 con la normal. Halle el módulo y dirección de E_2



¿qué sabemos?

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = 0}$$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

ε / $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 + \chi_e) \vec{E}$$

$$\varepsilon_{Re} = \varepsilon_0 + \chi_e$$

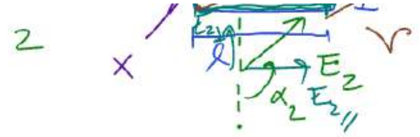
Reitz

Griffiths

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$\varepsilon_{gr} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$



$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\ell = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\quad E_{1\parallel}\ell + \cancel{E_{1\perp}(x)\frac{h}{2}}^{\to 0} - \cancel{E_{1\perp}(x+\ell)\frac{h}{2}}^{\to 0}$$

$$-E_{2\parallel}\ell + \cancel{E_{2\perp}(x)\frac{h}{2}}^{\to 0} - \cancel{E_{2\perp}(x+\ell)\frac{h}{2}}^{\to 0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

$$\int_V \nabla\cdot\vec{D} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \quad D_{1\perp}\cancel{S} = D_{2\perp}\cancel{S}$$

$$D_{1\perp} = D_{2\perp}$$

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \rightarrow \boxed{\varepsilon_1 E_1\cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2} \quad \text{II}$$

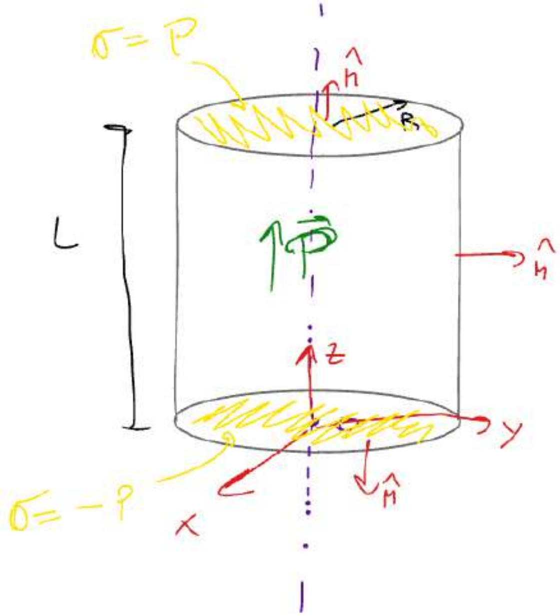
$$\text{I} \quad \boxed{E_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = E_2 \operatorname{sen}\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{I}}{\text{II}} \Rightarrow \frac{tg\,\alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{tg\,\alpha_2}{\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\,\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\, tg\,\alpha_1}$$

$$(\text{I})^2 + \left(\frac{\text{II}}{\varepsilon_2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{E_1^2\left(\operatorname{sen}^2\alpha_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}\cos^2\alpha_1\right) = E_2^2}$$

3. Un cilindro dieléctrico de sección circular de radio R y una longitud L, se polariza en la dirección de su longitud. Si la polarización es uniforme y de magnitud P, calcular el campo eléctrico que resulta de esta polarización en un punto del eje del cilindro.



$$\vec{E}_{mat}\overbrace{(0,0,z)}^{\vec{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V}\frac{-\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\partial V}\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^2\vec{r}\,'$$

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla\cdot\vec{P}(\vec{r})\Big|_{V} = 0 \\ \vec{P}\cdot\hat{n} = \begin{cases} P & \text{si } z = L \leftarrow \text{cara superior} \\ -P & \text{si } z = 0 \leftarrow \text{cara inferior} \\ 0 & \text{si } r = R \leftarrow \text{cara lateral} \end{cases} \\ \vec{P} = P\hat{k} \end{array}\right.$$

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left[\overbrace{-\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{(z\hat{k}-\cancel{\rho'\hat{e}_{\rho'}})}{(z^2+\rho'^2)^{3/2}}\rho'd\rho'd\phi'}^{\text{cara inferior}} + \underbrace{\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{(z-L)\hat{k}-\cancel{\rho'\hat{e}_{\rho'}}}{((z-L)^2+\rho'^2)^{3/2}}\rho'd\rho'd\phi'}_{\text{cara superior}}\right]$$

0 por sim.

0 por sim.

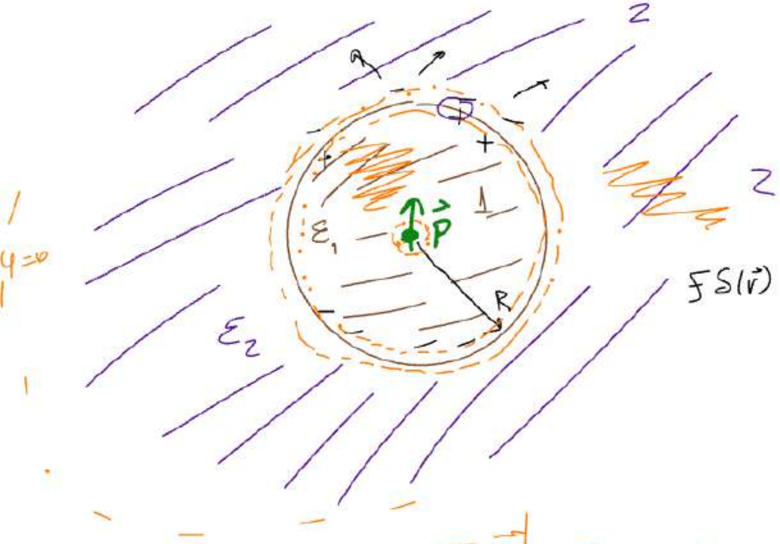
$$\vec{r}\,' = \rho'\hat{e}_{\rho'} + L\hat{k}$$

$$\vec{r}-\vec{r}\,'$$

Igual al ej. 2.2 pero superponiendo los campos de 2 discos separados una distancia L.

1

4. Suponga un dipolo puntual en el centro de una esfera dieléctrica de radio R. La esfera se encuentra en otro medio dieléctrico infinito. Calcular el campo dentro y fuera de la esfera.



$$\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec{\mathcal P} = -\rho_b$$

$$\nabla\cdot\vec D = \rho_f \qquad \vec D \equiv \varepsilon_0\vec E + \vec{\mathcal P}$$

$$\Rightarrow \vec D = \varepsilon\vec E$$

$$f\delta(\vec r) = \nabla\cdot D = \nabla\cdot(\varepsilon\vec E) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1 \nabla\cdot\vec E}{\varepsilon_0} & si\ r<R \\ \frac{\varepsilon_2 \nabla\cdot\vec E}{\varepsilon_0} & si\ r>R \end{cases}$$

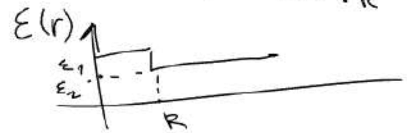
$$(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec E = \vec{\mathcal P} \Rightarrow \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\rho_T = -\rho_b$$

$$\Rightarrow \rho_f = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\rho_T$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\vec E) = 0$$

$$\| $$

$$\underbrace{\nabla\varepsilon\cdot\vec E}_{\propto\,\delta(r-R)} + \varepsilon\,\overbrace{\nabla\cdot\vec E}^{\frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{sup}\delta(r-R)}{\varepsilon_0}} \overset{\shortparallel}{} 0 \text{ salvo en } r = R$$



$$\nabla\cdot\vec D\big|_1 = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec E\big|_1 = 0$$

$$\nabla\cdot\vec D\big|_2 = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec E\big|_2 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi\big|_1 = 0, \quad \nabla^2\varphi\big|_2 = 0$$

$$-\nabla\varphi = \vec E$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{\varepsilon_0\rho_f}{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

Se cumple Laplace en 1 y 2.

1) Por la simetría me conviene usar coord.: esféricas

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{Tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho_f}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

1) Por la simetría me conviene usar coord.: esféricas

2) $\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \varphi_1(r,\theta) & \text{si } r<R \\ \varphi_2(r,\theta) & \text{si } r>R \end{cases}$

$$\varphi_i(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(A_n^{(i)} r^n + \frac{B_n^{(i)}}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta)$$

$i \in \{1,2\}$

3) (I) $\lim_{r\to\infty} \varphi = \lim_{r\to\infty} \varphi_2 = 0$

(II) $\lim_{r\to 0} \varphi = \lim_{r\to 0} \varphi_1 = \frac{\left(p\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$

$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\rho_T = \rho_f$

esta sí es la densidad que corresponde al dipolo $\vec{p}$

(III) $\lim_{r\to R^-} \varphi = \varphi_1\big|_R = \varphi_2\big|_R = \lim_{r\to R^+} \varphi$

$\lim_{\tau\to 0} \Delta\varphi = \lim_{\tau\to 0} -\int_\tau \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$ a menos que $\vec{E}$ diverja

$1 \big\}_{\tau}^{2}$

(IV) $\boxed{\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\Big|_R = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\Big|_R}$

$\left(\nabla\cdot\vec{D}\big|_R = 0\right)$

$\left(\varepsilon_2 E_{2_\perp} - \varepsilon_1 E_{1_\perp} = 0\right)$

4) Impongo condiciones de borde...