Taller de Modelización Matemática y Computacional
Clase Interacción de poblaciones - Ejercicios matemáticos complementarios

Los siguientes ejercicios constituyen una guía para estudiar una modificación del modelo de Lotka-Volterra en la cual la presa, en ausencia de depredador, crece siguiendo un modelo logístico.

Por su uso de un crecimiento logístico, uno podría pensar en principio que este modelo (al que podríamos llamar "Modelo de Lotka-Volterra logístico") es más realista. Sin embargo ¿será capaz de reproducir el comportamiento oscilatorio sostenido en el tiempo que les interesaba a estos investigadores?

Además del análisis matemático, es recomendable intentar armar un script para ir probando sus resultados, o en su defecto usar el script **`Lotka_Volterra_P_Logistica_2021_EC_SB.m`** disponible en el EVA.

Las ecuaciones del modelo son, por lo tanto:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \alpha N\left(1-\frac{N}{K}\right) - \beta NP \\ \frac{dP}{dt} = -\delta N - \gamma NP \end{cases}$$

Supondremos siempre que $N, P \geq 0$ y también que $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$

1) Encontrar las nulclinas del sistema, así como sus puntos de equilibrio. ¿Cuántos hay?

   Obs: En este caso el número de estado de equilibrio depende de los parámetros. ¿Cuáles son las condiciones para las distintas cantidades de puntos de equilibrio? (un ejemplo de una condición podría ser: "si $\alpha \geq \beta$ entonces hay 2 puntos de equilibrio")

2) Analice la estabilidad de estos puntos de equilibrio para los distintos juegos de parámetros de forma gráfica. ¿Puede afirmar conclusivamente la estabilidad de todos los puntos en todos los casos mediante este análisis cualitativo?

3) Ahora analice los puntos de equilibrio de forma analítica

   a) Calcule la matriz jacobiana del sistema. Debería obtenerse

   $$\mathbb{J}_{(N,P)} = \begin{bmatrix} \alpha - 2\frac{\alpha N}{K} - \beta P & \delta P \\ -\beta N & -\gamma + \delta N \end{bmatrix}$$

   b) Evalúe $\mathbb{J}$ y calcule los valores propios en los puntos de equilibrio que siempre existen, independientemente de los parámetros. **Obs:** Aunque la existencia de estos puntos no dependa de los parámetros, puede ser que los valores (y por tanto, los signos) de los correspondientes valores propios si lo hagan.

   c) Evalúe $\mathbb{J}$ en el punto de equilibrio (N^*, P^*) que solo está presente bajo cierta combinación de parámetros y calcule el polinomio característico $\chi_{\mathbb{J}}(\lambda)$. Sobre este polinomio:

      I. Suponiendo que el polinomio tiene raíces reales ¿Pueden alguna ser positiva? (es decir ¿Puede (N^*, P^*) ser inestable en alguna dirección?) ¿Podría alguna ser 0?

      II. ¿Puede tener raíces con parte imaginaria? ¿Cómo deben ser los parámetros para que esto ocurra? En los casos en los que ocurre ¿Qué signo tiene la parte real de las raíces?

4) En conclusión: ¿Cómo es el comportamiento del sistema? ¿Tiene siempre un punto estable? ¿Presenta oscilaciones? ¿Se mantienen estables en el tiempo como en el modelo de Lotka-Volterra original?