

Pruebas observacionales de relatividad general

Los primeros pruebas observacionales que establecieron a la relatividad general son fenómenos observados en el sistema solar y son consecuencias de la solución de Schwarzschild. Se llaman las "tres pruebas clásicas":

1. Avance del perihelio de Mercurio
2. Doblamiento de luz por el campo gravitatorio del sol
3. Corrimiento al rojo de líneas espectrales debido a la gravedad.

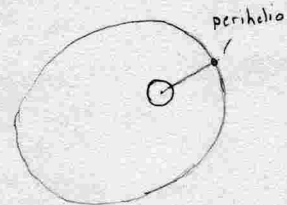
1. Avance del perihelio de Mercurio

Esta era históricamente la primera prueba. En la teoría de Newton un solo planeta atrapado en el campo gravitatorio de un sol esférico describe una órbita elíptica fija en el espacio, es decir que vuelve siempre sobre el mismo camino. En particular, el punto de mayor acercamiento del planeta al sol, el perihelio es siempre el mismo.

- Esto no es así si la atracción no es exactamente $\frac{1}{r^2}$ o si hay más que un planeta. En tal caso los planetas siguen todavía órbitas aproximadamente elípticas

en una vuelta, pero estas órbitas, y el vector Sol-planeta en perihelio, giran lentamente.

Esto es la precesión del perihelio.



- En 1859 el astrónomo francés Urbain Le Verrier calculó la precesión del perihelio de Mercurio esperada por la acción de los demás planetas y notó que la precesión observada era mayor que lo predicho por 7%. Le Verrier había tenido un éxito espectacular al predecir la existencia y posición de Neptuno a partir de anomalías en la órbita de Urano. (Fue hallado luego de solo horas de búsqueda a 1° de la posición predicho por Le Verrier.) Entonces Le Verrier propuso un nuevo planeta

"Vulcano" entre el sol y Mercurio. Se encontró muchas veces pero nunca fue confirmado en la misma órbita por otros



- en 1882 Simon Newcomb reanalizó los datos y encontró que el exceso de avance del perihelio de Mercurio es $43''/\text{siglo} = 43 \times \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ / 100 \text{ años (Terrestres)}$
- esencialmente el valor moderno.
- en 1915, apenas luego de adoptar su ecuación en vacío $R_{\mu\nu} = 0$ Einstein calculó (usando una solución aproximada) la contribución de relatividad general al avance del perihelio de Mercurio y encontró $43''/\text{siglo}$!
- Mas recientemente este efecto ha sido medido con gran precisión en binarios de estrellas de neutrones (pulsares) y concuerda con RG. (error relativo $\sim 10^{-6}$)

2. Doblamiento de luz por la gravedad del Sol

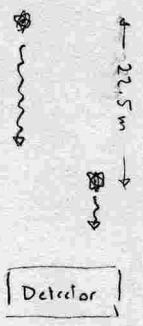
- primera predicción de RG medida luego que se publicó la teoría, por Eddington el d. 1919
- Hizo celebridad internacional de Einstein.
- Confirmaron predicción de Einstein con incertidumbre $\sim 10\%$. Suficiente para excluir cero doblamiento, y mas o menos excluir doblamiento cuasi Newtoniano.
- Luego en los años 1960 se empezó hacer estas mediciones con radio telescopios y se ha confirmado RG con error relativo $\sim 10^{-4}$
- También se han fotografiado instancias de "lentes gravitacionales" espectaculares con telescopios en luz visible.
- Hoy en día se usa el efecto "lente gravitacional" para buscar objetos no luminosos, como exoplanetas. "Yesterday's sensation is tomorrow's calibration"

3. Corrimiento al rojo de líneas espectrales

Hartle cap 10.1

- Predicho por Einstein muy al comienzo. (No se necesita sol^m de Schwarzschild para predicción en primer orden - es puro principio de equivalencia.)

- Tanto mucho en confirmarse. Recien en 1960 Pound y Rebka lograron medir la diferencia de frecuencia de luz de una cierta transicion atomica producido por atomos con una diferencia de altura de ~ 20 m. Confirmaron RG con incertidumbre $\sim 10\%$.
- 1976 Vesot y Levine lo testaron una fuente en altura 10224 km confirmo RG con incertidumbre $\sim 10^{-4}$.
- Hoy la correccion por corrimiento al rojo es esencial para el correcto funcionamiento de GPS.
- Se ha medido el fuerte corrimiento al rojo de lineas espectrales en la superficie de enanas blancas y en discos de accion de agujeros negros, aportando importantes datos sobre estos sistemas.



Calculamos estos efectos

Hartle cap. 9

Corrimiento al rojo en Schwarzschild

- Consideramos una fuente en reposo en cierto radio r_F , y un receptor en reposo en radio r_R .
- Si la fuente emite un pulso en tiempo t_F que demora un tiempo de Schwarzschild Δt en llegar al receptor, y luego en $t_F + \Delta t$ emite un segundo pulso este va demorar exactamente el mismo tiempo Δt en llegar al receptor como el primer pulso \leftarrow porque la metrica es estacionaria y fuente y receptor estan en reposo.

$$\Rightarrow \text{la diferencia en los tiempos de recepcion } t_{2R} - t_{1R} = t_{2F} + \Delta t - (t_{1F} + \Delta t) = t_{2F} - t_{1F}$$

\Rightarrow la frecuencia de una onda con respecto a la coordenada de tiempo de Schwarzschild t es igual en la fuente y en el receptor

- Pero si medimos la frecuencia con respecto al tiempo propio de la fuente y del receptor los resultados pueden ser distintos.
- Nota que es la frecuencia en tiempo propio que esta determinado por las caracteristicas de la fuente, y tambien la frecuencia en tiempo propio que mide un espectrografo

La frecuencia angular en τ es $\omega_\tau = \frac{d\theta}{d\tau} = \dots$ $\theta =$ fase de onda

" " " " " " $\omega_t = \frac{d\theta}{dt}$

$$\Rightarrow \omega_\tau = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \omega_t$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{-g_{00}} \quad \text{---} \quad d\tau^2 = -g_{00} dt^2 \quad \text{para un desplazamiento solo en tiempo } t$$

Entonces la frecuencia en tiempo propio que mide el receptor, $\omega_{\tau R}$, es relacionada a la frecuencia en tiempo propio de la fuente, $\omega_{\tau F}$, por

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\tau R} &= \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(r_R)}} \omega_t \\ \omega_{\tau F} &= \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(r_F)}} \omega_t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_{\tau R} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_F)}{g_{00}(r_R)}} \omega_{\tau F}$$

En la solución de Schwarzschild $\omega_{\tau R} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_F}}{1 - \frac{2M}{r_R}}} \omega_{\tau F}$ Usando unidades tal que $G = c = 1$

- Esto es el resultado exacto. Nota que cuando $r_F \rightarrow 2M = r_s$ $\omega_{\tau R} \rightarrow 0$
- la frecuencia se acerca a cero
- Si r_F y r_R ambos son $\gg 2M = r_s$ \leftarrow lejos y entonces gravedad débil

$$\frac{2M}{r_F}, \frac{2M}{r_R} \ll 1 \quad \text{así} \quad \omega_{\tau R} \approx \left(1 - \frac{M}{r_F} + \frac{M}{r_R}\right) \omega_{\tau F} \quad \text{restaurando } G, c$$

$$= \left(1 + (\phi_F - \phi_R)/c^2\right) \omega_{\tau F}$$

$$\phi = -\frac{GM}{r} = \text{potencial gravitacional Newtoniano}$$

- Igual a lo que se obtiene de gravedad Newtoniana y el principio de equivalencia.
- El caso más usado en astrofísica es de un receptor en $r = \infty$. Entonces

$$\omega_{\tau R} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_F}} \omega_{\tau F}$$

La luz que viene desde la fuente se ve enrojecida (con menor ω) en el receptor.

No solo aplica a la frecuencia de la luz. También un reloj que vemos andando abajo, más cerca al centro, lo veríamos entretardado. Así si quieres vivir hasta más tarde que tus colegas escoge una oficina en el subsuelo. Si quieres más tiempo (propio) para terminar tareas con plazos escoge una oficina en lo alto.

Si la diferencia en altura es 70m (como en FCIU) ¿cuanto más tiempo propio tiene la carrera de 30 años de un matemático que las 30 años de un físico experimentalista?

Orbitas de partículas masivas

- La ecuación de geodésicas, aún en la simple métrica de Schwarzschild, es una ecuación complicada. Pero se puede resolver aprovechando de leyes de conservación.
- Estas surgen de simetrías de la acción.

$$I = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda \quad \leftarrow \text{con } g \text{ la métrica de Schwarzschild}$$

El Lagrangiano $L = -m \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ es independiente de t entonces la ecuación Euler-Lagrange da que

$$\frac{d}{d\lambda} p_t = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow p_t \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -m \frac{1}{2} \frac{-2g_{tv} \dot{x}^v}{\sqrt{-g_{\sigma\rho} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho}} = g_{tt} m \frac{dt}{d\tau} \quad \text{es un constante de movimiento}$$

(Es (-1 por) la energía)

El Lagrangiano es también independiente de ϕ . Entonces

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = g_{\phi\phi} m \frac{d\phi}{d\tau}$$

Es otro constante de movimiento. Es un componente del momento angular

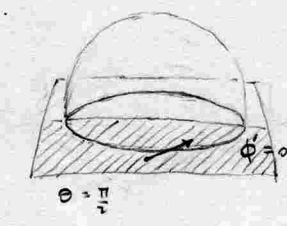
Hay tres componentes del momento angular, todos conservadas, tal como en la teoría Newtoniana. Pero nuestro primitiva método de encontrar las cantidades conservadas - como momentos canonicos correspondientes a coordenadas que no aparecen en el Lagrangiano - no nos permite encontrarlos fácilmente. Las coordenadas de Schwarzschild solo estan adaptadas a la simetria bajo traslación en t y en ϕ , mientras otras rotaciones, que tambien son simétricas, no corresponden a traslación en ninguna coordenada.

- Pero las constantes que ya tengamos son esencialmente suficientes: En la teoría Newtoniana la conservación de la dirección del momento angular implica que el movimiento transcurre en un plano perpendicular a este, un plano determinado por la posición y velocidad inicial y el centro de simetría. La conservación de la norma del momento angular y la energía luego define la forma de la órbita.

- Esencialmente lo mismo ocurre en RG: Podemos elegir a las coordenadas angulares tal que inicialmente la partícula esta en el "plano ecuatorial" $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{d\theta}{d\tau} = 0$. Entonces, por conservación de momento angular la partícula permanece en el plano ecuatorial.

- Dem: Sean θ', ϕ' coordenadas angulares esféricas girados por 90° tal que el semi plano $\phi' = 0$ coincide con una mitad de $\theta = \frac{\pi}{2}$ que contiene la posición inicial de la partícula en su interior.

Entonces inicialmente $p_{\phi'} = g_{\phi'\phi'} m \frac{d\phi'}{d\tau} = 0$,
 y porque se conserva $\frac{d\phi'}{d\tau} = 0 \Rightarrow \phi' = \text{constante}$
 $\Rightarrow \phi' = 0$ siempre
 (salvo si θ' llega a 0 o π donde las coordenadas fallan.)



\Rightarrow la partícula permanece en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$

En este punto en la teoría Newtoniana se escribe la energía total conservada como suma de la energía cinética angular, expresada como función del momento angular y r , la energía cinética radial, en términos de $\frac{dr}{dt}$, y la energía potencial, una función de r .

Se obtiene $E = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U(r)$, una ecuación diferencial para $r(t)$

- En RG hacemos esencialmente lo mismo: incluimos la energía mc^2 de la masa y reordenamos para obtener una expresión para la masa en términos de E, L, r , y $\frac{dr}{dt}$
- Pero dividimos todo por la masa, que en definitiva no incide en la ecuación (y ponemos $c=1$):

$$-1 = u \cdot u = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{tt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + g_{rr} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + g_{\phi\phi} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

- Definición $e = -\frac{p_t}{m} = -g_{tt} \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$ ← la energía por unidad de masa

$$l = \frac{p_\phi}{m} = g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \quad \leftarrow \text{momento angular por unidad de masa}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow -1 = g_{tt}^{-1} e^2 + g_{rr} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + g_{\phi\phi}^{-1} l^2$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow e^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} - \frac{2M}{r} \right]$$

- Definición $\mathcal{E} = \frac{e^2 - 1}{2}$ ← En situación Newtoniana, $\frac{r_s}{r} \ll 1, \frac{dt}{d\tau} \approx 1, 1 \approx e = \sqrt{1 + 2\mathcal{E}} \Rightarrow \mathcal{E} \ll 1$
 $\Rightarrow e = 1 + \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} \approx \text{Energía Newtoniana} / mc^2$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} - \frac{2M}{r} \right] = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r)} \quad \leftarrow \text{ecuación radial}$$

- exactamente como ecuación radial Newtoniana, incluso el potencial efectivo es casi igual:

$$V_{\text{eff}} = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3}$$

\uparrow potencial gravitatorio \uparrow barrera centrífuga

- este término produce todas las diferencias en orbitas

P.ej. en teoría Newtoniana partícula nunca llega a $r=0$ salvo si $l=0$. No así en RG porque la barrera centrífuga tiene altura finita.

