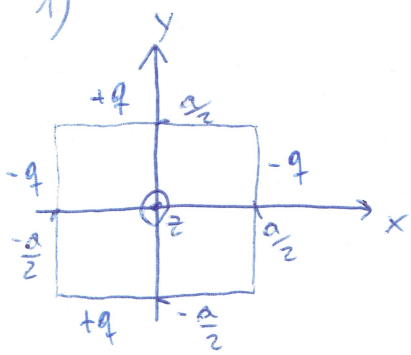
1)



$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}\,')\left(3r'_i r'_j - r'^2\delta_{ij}\right) d^3\vec{r}\,'$$

$$\rho(\vec{r}\,') = \delta(z)\begin{cases} \delta(y-\frac{a}{2})\,\lambda & \text{si } y>0,\ -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2} \\ \delta(y+\frac{a}{2})\,\lambda & \text{si } y<0,\ -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2} \\ -\delta(x-\frac{a}{2})\,\lambda & \text{si } x>0,\ -\frac{a}{2}<y<\frac{a}{2} \\ -\delta(x+\frac{a}{2})\,\lambda & \text{si } x<0,\ -\frac{a}{2}<y<\frac{a}{2} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_{ij} = \lambda\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[(3r'_i r'_j - r'^2\delta_{ij})\right]\Big|_{\substack{z=0\\ y=\frac{a}{2}}} dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[(3r'_i r'_j - r'^2\delta_{ij})\right]\Big|_{\substack{z=0\\ y=-\frac{a}{2}}} dx\right.$$

$$\lambda = \frac{q}{a}$$

$$\left. - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[(3r'_i r'_j - r'^2\delta_{ij})\right]\Big|_{\substack{z=0\\ x=\frac{a}{2}}} dy - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[(3r'_i r'_j - r'^2\delta_{ij})\right]\Big|_{\substack{z=0\\ x=-\frac{a}{2}}} dy\right]$$

Por simetría es $Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$ ya que son integrales de funciones impares en x y/o y. entre $-\frac{a}{2}$ y $\frac{a}{2}$

Q_{xx}

$r'_i = r'_j = x'$

$r' = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$Q_{xx} = \lambda\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underbrace{2x^2 - \frac{a^2}{4}}_{3x^2-(x^2+y^2+z^2)\big|_{\substack{z=0\\ y=\frac{a}{2}}}} dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underbrace{2x^2 - \frac{a^2}{4}}_{3x^2-(x^2+y^2+z^2)\big|_{\substack{z=0\\ y=-\frac{a}{2}}}} dx\right.$$

$$\left. - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underbrace{2\frac{a^2}{4} - y^2}_{3x^2-(x^2+y^2+z^2)\big|_{\substack{z=0\\ x=\frac{a}{2}}}} dy - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underbrace{2\frac{a^2}{4} - y^2}_{3x^2-(x^2+y^2+z^2)\big|_{\substack{z=0\\ x=-\frac{a}{2}}}} dy\right]$$

$$\Rightarrow Q_{xx} = \lambda\left[2\left(2\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} - \frac{a^3}{4}\right) - 2\left(\frac{a^3}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow Q_{xx} = \lambda\left[2\left(\frac{2}{3}\frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{4}\right) - 2\left(\frac{a^3}{2} - \frac{1}{3}\frac{a^3}{4}\right)\right]$$

$$= 2\lambda\frac{a^3}{4}\left[-\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{3}\right] = -\lambda a^3$$

Q_{yy}

$r'_i = r'_j = y$

$r' = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

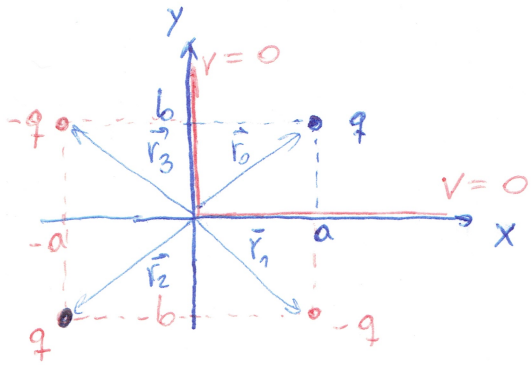
$$Q_{yy} = \lambda\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \overbrace{\left[2\frac{a^2}{4} - x^2\right]}^{3y^2-x^2-y^2-z^2\big|_{\substack{z=0\\ y=\frac{a}{2}}}} dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \overbrace{\left[2\frac{a^2}{4} - x^2\right]}^{3y^2-x^2-y^2-z^2\big|_{\substack{z=0\\ y=-\frac{a}{2}}}} dx\right.$$

$$\left. - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underbrace{2y^2 - \frac{a^2}{4}}_{3y^2-x^2-y^2-z^2\big|_{\substack{z=0\\ x=\frac{a}{2}}}} - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underbrace{2y^2 - \frac{a^2}{4}}_{3y^2-x^2-y^2-z^2\big|_{\substack{z=0\\ x=-\frac{a}{2}}}}\right] = -Q_{xx}$$

$$= \lambda a^3$$

como traza de Q es cero $Tr(Q) = 0$ $\Rightarrow Q_{zz} = -Q_{xx} - Q_{yy} = 0.$ $\Rightarrow \boxed{Q = \lambda a^3 \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}$

2)



Si colocamos cargas imágenes en las regiones que no nos interesa el potencial y con éstas más las cargas ~~obtenidas~~ reales logramos satisfacer las condiciones de borde

$\Rightarrow$ por unicidad de las soluciones a la ec. de Laplace Esta será nuestra solución.

Esto se logra colocando cargas $-q$, q y $-q$ en las posiciones $\vec{r}_1 = a\hat{i} - b\hat{j}$, $\vec{r}_2 = -a\hat{i} - b\hat{j}$ y $\vec{r}_3 = -a\hat{i} + b\hat{j}$, respectivamente.

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_3|} \right]}$$

siendo $\vec{r}_0 = a\hat{i} + b\hat{j}$ la posición de la carga real.

es claro que si $y = 0$ $\varphi = 0$ porque $|\vec{r}_3 - \vec{r}_0| = |\vec{r} - \vec{r}_1|$ y $|\vec{r} - \vec{r}_2| = |\vec{r} - \vec{r}_3|$

si $x = 0$ $\varphi = 0$ porque $|\vec{r} - \vec{r}_0| = |\vec{r} - \vec{r}_3|$
$|\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_2|$

y $\lim_{r \to \infty} \varphi = 0$

$\Rightarrow$ se satisfacen las condiciones de borde

La fuerza sobre la carga real q en $\vec{r}_0$ es $\vec{E}_q\big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} q$ siendo $\vec{E}_q$ el campo creado por todas las cargas que no son la carga real.

$$\vec{E}_q = -\nabla \left\{ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_3|} \right] \right\} \Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_q = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2|^3} + \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_3|^3} \right\}}$$

El método de imágenes funciona en este caso ya que no debemos colocar cargas en la región en que nos interesa el potencial. para lograr satisfacer las condiciones de borde. Si tuviéramos que colocar cargas en la región de interés no se satisfaceria más la ec. de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$

Funciona para ángulos $\alpha = \frac{\pi}{n}$ entre los planos con $n \in \mathbb{N}$.

para otros ángulos al ir colocando cargas imágenes eventualmente terminaríamos colocando cargas virtuales/imaginarias en la región de interés.

3)

$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad \forall\, r \;/\; 0 < r < R$$

Por la simetría

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

sujeto a las cond de borde:

C1) $\lim_{r \to 0} \varphi = \dfrac{p P_1(\cos\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\qquad \left(P_1(\cos\theta) = \cos\theta \right)$

C2) $\varphi(R,\theta) = V_0 = K\cos^2(\theta) = K\left[\frac{2}{3} P_2(\cos\theta) + \frac{P_0(\cos\theta)}{3} \right]$

Imponiendo C1 es $B_n = 0 \;\; \forall\, n > 1$
y $B_0 = 0$ ya que no hay carga neta puntual en el origen.

$$B_1 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}$$

Imponiendo C2 es

$$\varphi(R,\theta) = \frac{K}{3}\left[2P_2(\cos\theta) + P_0(\cos\theta) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(A_n R^n + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\delta_{n1}}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{K}{3} \qquad A_1 R + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 0 \qquad A_2 R^2 = \frac{2}{3}K \qquad A_n = 0 \;\forall n >$$

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad \Rightarrow A_2 = \frac{2K}{3R^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(r,\theta) = \frac{K}{3} + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right)\cos\theta + \frac{K}{R^2} r^2 \cos^2\theta - \frac{K}{3R^2} r^2$$

$$\Rightarrow \varphi(r,\theta) = \frac{K}{3}\left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] + \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) + \frac{K}{R^2} r^2 \cos^2\theta$$