- Si se escribe la ecuación radial en unidades convencionales queda claro que el término $\frac{M\ell^2}{r^3}$ es una corrección relativista de un orden más en $\frac{1}{c^2}$ que los demás términos en el lado derecha de la ecuación. Para ver esto insertamos G's y c's, que son 1 en nuestras unidades, en el lado derecha tal que los términos permanecen adimensionados cuando se expresan en unidades arbitrarias de masa, longitud y tiempo

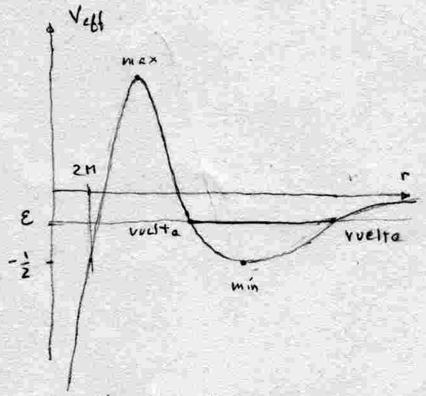
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GM}{c^2 r} + \frac{\ell^2}{2c^2 r^2} - \frac{GM}{c^2 r}\frac{\ell^2}{c^2 r^2}$$

$$\frac{\ell}{r} = r\frac{d\phi}{d\tau} = \text{velocidad}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}c^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{GM\ell^2}{r^3}$$

– esto también confirma que el constante $\mathcal{E}$ = Energía Newtoniana $/mc^2 + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$

- Si la partícula arranca <u>fuera de la barrera centrífugal</u> entonces, como en teoría Newtoniana, $\underline{\mathcal{E} \geq 0}$ implica que la partícula, moviendo sin propulsión, va $r \to \infty$ con $\tau \to +\infty$ o $\tau \to -\infty$.



– Si $\mathcal{E} = 0$ su velocidad (radial $\frac{dr}{d\tau}$ y transversal $\frac{\ell}{r}$) tiende a 0 con $r \to \infty$.

– Si $\mathcal{E} < 0$ la partícula se mueve entre "puntos de vuelta" donde para su movimiento hacia afuera o hacia adentro y da vuelta. Estos son órbitas ligadas

– Muy cerca de $r_s = 2M$ (el horizonte) también puede haber líneas mundo con $\mathcal{E} > 0$ que no escapan a $r = \infty$, si ℓ es lo suficientemente grande tal que el máximo de la barrera centrífugal tiene $V_{eff}(r_{max}) > 0$. En el sistema solar estos no son de importancia, ya que toda esta región de r está tapado por la materia del Sol – la solⁿ de Schwarzschild y entonces nuestra ecuación radial no vale allí.

- Si la partícula mueve solo radialmente (caida o subida vertical) $\Rightarrow \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \Rightarrow \ell = 0$
- Si no, $\ell^2 > 0$.
  - Si ℓ^2 es suficientemente grande entonces V_{eff} tiene un máximo en r_{max} y un mínimo local en r_{min}. Calculamos estos: En estos puntos

$$0 = \frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{M}{r^2} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{3M\ell^2}{r^4}$$

$$\Rightarrow 0 = r^2 - \frac{\ell^2}{M} r + 3\ell^2$$

$$= \left(r - \frac{\ell^2}{2M}\right)^2 - \left(\frac{\ell^2}{2M}\right)^2 + 3\ell^2$$

$$\Rightarrow r = \frac{\ell^2}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell^2}{2M}\right)^2 - 3\ell^2} = \frac{\ell^2}{2M}\left(1 \pm \sqrt{1 - 12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2}\right)$$

$$r_{max} = \frac{\ell^2}{2M}\left(1 - \sqrt{1-12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2}\right) \qquad r_{min} = \frac{\ell^2}{2M}\left(1 + \sqrt{1-12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2}\right)$$

$\frac{dV_{eff}}{dr} > 0$ para r suficientemente chico, así con creciente r primero viene un máximo de V_{eff} y luego un mínimo.

  - Si $\mathcal{E} = V_{eff}(r_{min})$ entonces r no puede variar con el tiempo, ya que cualquier cambio pequeño de r hace $V_{eff}(r) > \mathcal{E} \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 < 0$ que no tiene solución real.

    $\Rightarrow$ la linea mundo corresponde a una orbita circular

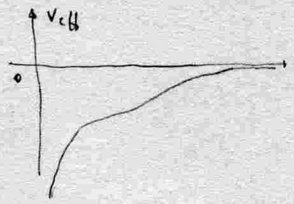
  - cualquier pequeña perturbacion posible de la orbita implica que $\mathcal{E}$ aumenta y/o $V_{eff}(r_{min})$ decrece. El resultado es una orbita casi circular con r oscilando entre dos puntos de vuelta muy cercanos al radio r_{min} original.

    $\Rightarrow$ Esta orbita circular correspondiente a r_{min} es <u>estable</u>

  - Note que cuando ℓ crece $V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ crece en todo $r > 2M$ (es decir, fuera del horizonte). El maximo ℓ posible para una particula en una orbita estable ($\mathcal{E} < 0$ $r > r_{max}$ — fuera barrera centrifugal) con $\mathcal{E}$ dado es en la orbita circular estable.

Si $\frac{l}{M} < \sqrt{12}$ entonces el radicando $1 - 12\left(\frac{M}{l}\right)^2 < 0$ y no existe r_{max}, r_{min} real. $\Rightarrow$ $V_{eff}(r)$ no tiene puntos estacionarios en la linea $r \in \mathbb{R}$ $r > 0$

- como pasa $l = 0$ en que $V_{eff}(r) = -\frac{M}{r}$ V_{eff} crece monotonicamente con r creciente, acercandose a 0 con $r \to \infty$

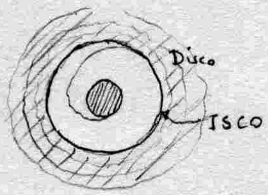


Si $\frac{l}{M} = \sqrt{12}$ $r_{max} = r_{min} = \frac{l^2}{2M} = \frac{12}{2} M = 6M$

Aumentando $\frac{l}{M}$ infinitesimalmente encima de $\sqrt{12}$ r_{min} pasa ser un poquito mas que 6M y una orbita estable (apenas).

$\Rightarrow$ $r = 6M$ es el "ISCO", el Innermost Stable Circular Orbit.

Los discos de acreción de objetos muy compactos, con radio $R < 6M$, suelen tener radio inferior $\simeq 6M$, y de ahí la materia cae sobre el cuerpo central "sin muchas mas vueltas"



- Para $\frac{l}{M} > \sqrt{12}$ el radio r_{min} de la orbita circular estable crece con l con $r_{min} \to \infty$ cuando $l \to \infty$

- ¿Que pasa si $\mathcal{E} = V_{eff}(r_{max})$?

- Si la partícula esta en $r = r_{max}$ entonces $\frac{dr}{d\tau} = 0$.

  Pero ¿cuanto es la aceleracion radial $\frac{d^2r}{d\tau^2}$

- Podríamos volver a la ecuación de las geodesicas para calcularla.

  Pero la podemos obtener de la ecuación radial:

Donde $\frac{dr}{d\tau} \neq 0$ $\quad \frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{dr}{d\tau}\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\right) = \frac{d}{dr}\left[\mathcal{E} - V_{eff}\right]$

$$= -\frac{dV_{eff}}{dr}$$

Donde $\frac{dr}{d\tau} = 0$ todavia vale porque los lados son continuos

$\Rightarrow$ tambien $\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$ en r_{max}. Así es una orbita circular.

<u>Pero no es estable</u>

Forma de orbitas no circulares – avance del perihelio   Sigo desarrollo de N. Straumann

- Reescribimos la ecuacion radial en términos de $u = \frac{1}{r}$

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{du^{-1}}{d\tau} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2u^4}\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 - Mu + \frac{\ell^2}{2}u^2 - M\ell^2 u^3$$

- Vamos a diferenciar en ϕ en lugar de τ

$$\ell = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\ell}{r^2} = \ell u^2 \Rightarrow \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \ell^2 u^4$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - Mu + \frac{\ell^2}{2}u^2 - M\ell^2 u^3$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{2\mathcal{E}}{\ell^2} + \frac{2M}{\ell^2}u + 2Mu^3$$

- Diferenciamos esta ecuación en ϕ para obtener

$$2\frac{du}{d\phi}\left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u\right) = 2\frac{du}{d\phi}\left(\frac{M}{\ell^2} + 3Mu^2\right)$$

Entonces: o la orbita es circular – $\frac{du}{d\phi} = 0$

o es no circular y

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{\ell^2} + 3Mu^2$$

- El último termino es la correción relativista. Sin este término la solucion es

$$u = \frac{M}{\ell^2}(1 + \epsilon\cos\phi)$$

ϵ es un parametro libre en la solucion pero debe $\epsilon \leq 1$ para que $u \geq 0 \Leftrightarrow 0 < r$

Tomamos, por convención, $\phi = 0$ donde u es mas grande $\Leftrightarrow$ r mas chico. $\phi = 0$

donde la particula se acerca mas al cuerpo central ← perihelion para planeta entorno al sol.

$\Rightarrow \epsilon \geq 0$ – solución es una elipse con eccentricidad ϵ y eje semi-major a

definido por $\frac{\ell^2}{M} = a(1-\epsilon^2)$

Ahora tomamos en cuenta la correcion relativista en la ecuación aproximadamente

- calculemos $3Mu^2$ usando la solución Newtoniana para u

$$3Mu^2 = 3M\frac{M^2}{\ell^4}\left(1 + 2\epsilon\cos\phi + \epsilon^2\cos^2\phi\right)$$

- insertamos esta expresión en la ecuacion para u y obtenemos una solucion corregida.

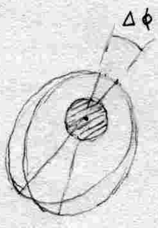
$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{\ell^2} + \frac{3M^3}{\ell^4}\left(1 + 2\epsilon\cos\phi + \epsilon^2\cos^2\phi\right)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{\ell^2}\left(1 + \epsilon\cos\phi\right) + \frac{3M^3}{\ell^4}\left(1 + \epsilon\,\phi\operatorname{sen}\phi + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{6}\cos 2\phi\right) \quad ✓$$

- Calculando la correcion relativista con esta solución corregida y insertando el resultado en la ecuacion radial obtenemos una solucion corregida aun mas exacta, con correcciones mas altas en el pequeño parametro $\frac{M^2}{\ell^2} = \frac{G^2M^2}{c^4 r^4}\frac{P^2}{(2\pi)^2}c^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{GM}{r^2}\frac{P}{2\pi}\right)^2$

Pero nos va alcanzar la primera correcion $\simeq \left(\frac{v}{c}\right)^2$ v = velocidad orbital en tiempo t

¿ En cual ángulo $\phi = 2\pi + \Delta\phi$ la particula vuelve al máximo acercamiento al cuerpo central ?



$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{M}{\ell^2}\epsilon\operatorname{sen}\phi + \frac{3M^3}{\ell^4}\epsilon\left(\frac{\epsilon}{3}\operatorname{sen}2\phi + \operatorname{sen}\phi + \phi\cos\phi\right)$$

En maximo acercamiento $\frac{du}{d\phi} = 0$

Esto se da en $\phi = 0$ y en $\phi = 2\pi + \Delta\phi$ con

$$0 = -\operatorname{sen}\Delta\phi + 3\frac{M^2}{\ell^2}\left(\frac{\epsilon}{3}\operatorname{sen}2\Delta\phi + \operatorname{sen}\Delta\phi + (2\pi + \Delta\phi)\cos\Delta\phi\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = 6\pi\frac{M^2}{\ell^2}$$ porque $\left(\frac{M}{\ell}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow \Delta\phi \ll 1$

$$= 6\pi\frac{M}{a(1-\epsilon^2)}$$

$$= 3\pi\frac{2.95\,\text{km}}{5.79\times10^7\,\text{km}}\frac{1}{(1-(0.205)^2)}$$ radio de Schwarzschild del sol

$= 5.01\times10^{-7}$ por orbita. Periodo orbital = 88.0 dias = 0.2408 a

$= 2.08\times10^{-4}/100\,a = 42.9''/100\,a$!! $\Rightarrow$ 415.2 orbitas en 100 años