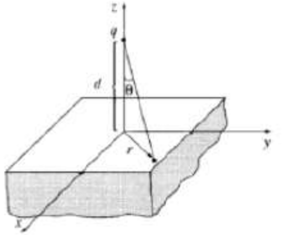
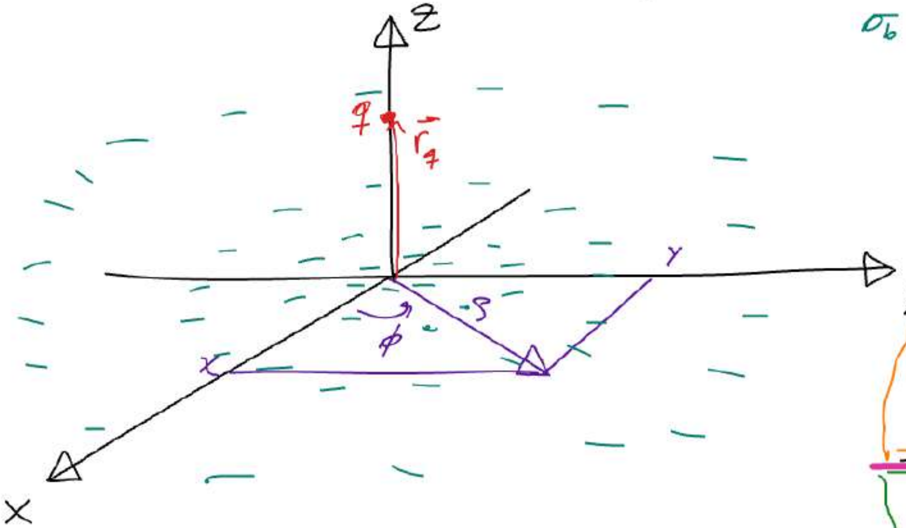
7. Suponga que la región por debajo del plano $z = 0$ está llena con un material dieléctrico lineal de susceptibilidad χ_e. Una carga puntual $+q$ se sitúa a una distancia d por encima del dieléctrico.

a) Hallar la densidad superficial de carga que se induce en la superficio del dieléctrico.

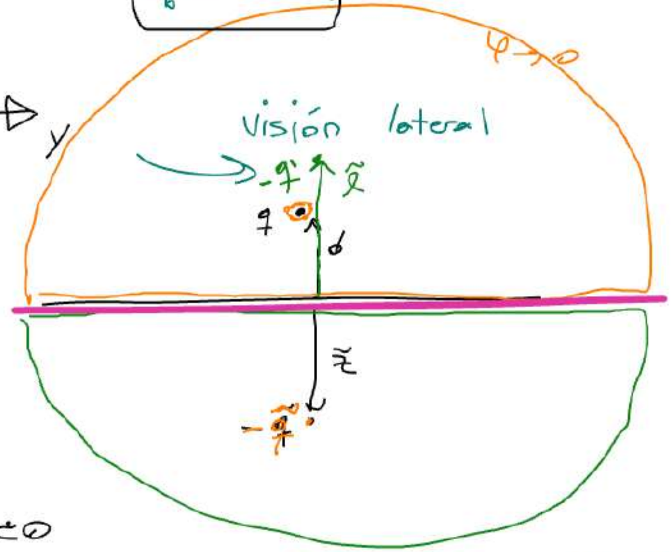
b) Hallar la fuerza sobre la carga q.





$$\sigma_b = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = (\vec{E}_{arriba} - \vec{E}_{abajo})\cdot\hat{k}$$

$$\boxed{\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{k}}$$



$\nabla^2\varphi = 0$

V_q

c.b.

$\nabla\cdot\vec{D} = 0$ ∴ q. no hay $(\vec{D}_{Arrib} - \vec{D}_{Abajo})\cdot\hat{k} = 0$

$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\rho, \phi, z) = \frac{q}{\quad}$

C.b.

$\nabla\cdot\vec D = 0$ xq no hay carga libre $\quad (\vec D_{Arrib} - \vec D_{Abajo})\cdot\hat k = 0$

$(\epsilon_0 \vec E_{Arriba} - \epsilon \vec E_{abajo})\cdot\hat k = 0$

(CB2) $\epsilon_0\left(-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0^+} + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0^-}\right) = 0$

(CB1) $\varphi\big|_{z=0^-} = \varphi\big|_{z=0^+}$

$z>0$

$$\varphi(\vec r) = \varphi(\rho,\phi,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec r - \vec r_q|} - \frac{\tilde q}{4\pi\epsilon_0|\vec r - \vec r_{\tilde q}|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(z-d)^2+\rho^2}} - \frac{\tilde q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(z+\tilde z)^2+\rho^2}}$$

$z<0$

$$\varphi(\vec r) = \varphi(\rho,\phi,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec r - \vec r_q|} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0|\vec r - \vec r_{q'}|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(z-d)^2+\rho^2}} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(z-\chi)^2+\rho^2}}$$

(CB1)

$$z=0^+ \rightarrow \varphi(\rho,\phi,0) = \cancel{\frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{d^2+\rho^2}}} - \frac{\tilde q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\tilde z^2+\rho^2}} = \cancel{\frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{d^2+\rho^2}}} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\tilde z^2+\rho^2}} = \varphi(\rho,\phi,0) \leftarrow z=0^-$$

$$\tilde q^2(\tilde z^2+\rho^2) - q'^2(\tilde z^2+\rho^2)$$

(CB1)

$$\overline{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(z-d)^2+\rho^2}} \qquad \overline{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(z-\tilde{z})^2+\rho^2}}$$

$$z=0^+ \rightarrow \varphi(\rho,\phi,0) = \frac{q}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{d^2+\rho^2}} - \frac{\tilde{q}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\tilde{z}^2+\rho^2}} = \frac{q}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{d^2+\rho^2}} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\tilde{z}^2+\rho^2}} = \varphi(\rho,\phi,0) \leftarrow z=0^-$$

$$\Rightarrow \tilde{q}^2(\tilde{z}^2+\rho^2) = q'^2(\tilde{z}^2+\rho^2)$$

$$\Rightarrow \tilde{q} = q'$$
$$\tilde{z} = \tilde{z}$$

$$z>0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\left[-\frac{q(z-d)}{((z-d)^2+\rho^2)^{3/2}} + \frac{\tilde{q}(z+\tilde{z})}{((z+\tilde{z})^2+\rho^2)^{3/2}}\right]$$

$$z<0 \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \cancel{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 4\pi\varepsilon_0}}\left[-\frac{q(z-d)}{((z-d)^2+\rho^2)^{3/2}} + \frac{\tilde{q}(z-\tilde{z})}{((z-\tilde{z})^2+\rho^2)^{3/2}}\right]$$

(C.B2) $\Big|_{z=0}$

$$\Rightarrow \frac{qd}{(d^2+\rho^2)^{3/2}} + \frac{\tilde{q}\tilde{z}}{(\tilde{z}^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\left[\frac{qd}{(d^2+\rho^2)^{3/2}} - \frac{\tilde{q}\tilde{z}}{(\tilde{z}^2+\rho^2)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{q}\tilde{z}\left(1+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{(\tilde{z}^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{qd\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1\right)}{(d^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$$\tilde{q}\tilde{z}(d^2+\rho^2)^{3/2} = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+\varepsilon_0}\, qd\,(\tilde{z}^2+\rho^2)^{3/2}$$

$$(\tilde{q}\tilde{z})^{\frac{2}{3}}(d^2+\rho^2) = \left[\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\right)qd\right]^{\frac{2}{3}}(\tilde{z}^2+\rho^2)$$

$$\Rightarrow (\tilde{q}\tilde{z})^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\right)qd\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$d^2(\tilde{q}\tilde{z})^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\right)qd\right]^{\frac{2}{3}}\tilde{z}^2$$

$$\Rightarrow d = \tilde{z}$$

$$\Rightarrow \tilde{q} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\, q$$

$$\Rightarrow \sigma_b = \varepsilon_0\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0^+} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0^-}\right]$$

Chequear

y luego $\vec{F}_q = -q\,\nabla(\varphi_q)$ $(z>0)$

11. Se tiene un condensador plano cuyas placas son rectangulares de área $S = ab$ y están separadas una distacia d.

   a) Hallar la fuerza que ejerce una placa sobre la otra por integración directa.

   b) Hallar la energía almacenada y deducir a partir de esta la fuerza entre las placas para los casos:

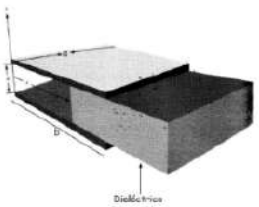
      1) Las placas se mantienen a una diferencia de potencial constante V_0

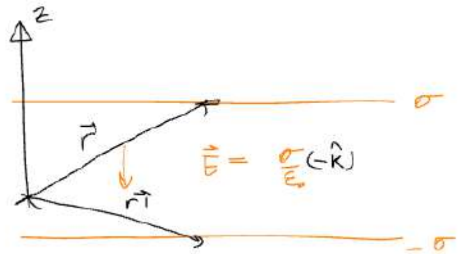
      2) Luego de haber sido sometidas a una diferencia de potencial V_0 se aíslan.

   c) Se introduce parcialmente un trozo de lados rectangulares de dieléctrico, de permitividad ϵ, y dimensiones de sus lados d, a y b.

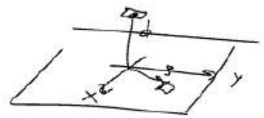
      1) Hallar el campo eléctrico en el dieléctrico, en la región vacía entre las placas y las densidades de carga en las placas (tanto de polarización como libre).

      2) Hallar la fuerza que se ejerce sobre el dieléctrico.





$$\vec{F}_{dq/dq'} = \frac{dq\, dq' \,(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \,|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\vec{F}_{/dq} = \int \vec{F}_{dq'/dq}$$

$$\parallel$$

$$\vec{E}\, dq \quad dq = \sigma\, dx\, dy$$

densidad abajo

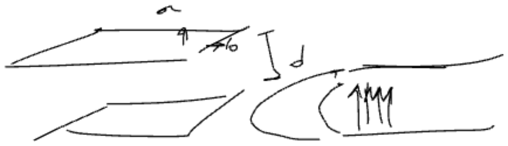
$$\vec{E} = \underbrace{\int \left[dx'dy'(-\sigma)\right]}_{} \frac{(d\hat{k} - \rho' \hat{e}_{\rho'})}{(d^2 + \rho'^2)^{3/2}} \quad \leftarrow dq'$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\substack{\text{debido}\\ \text{a 1 placa}}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\, \mathrm{sg}(z)$$

$$\vec{F}_{/dq} = -\frac{\sigma^2 dx\,dy\,\hat{k}}{2\varepsilon_0}\, \mathrm{sg}(z)$$

$$\boxed{\vec{f}_{\substack{\text{placa}\\ \text{arriba}}} = \frac{\vec{F}}{S} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

b) $U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E}^2 d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 abd = \frac{\varepsilon_0 \sigma^2}{2\varepsilon_0^2} \overbrace{ab}^{S} d$



$\vec{F} = -\nabla U$

$E = \frac{V}{d}$

$U = \frac{Q^2 d}{S\, 2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2d}$

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ $\quad \frac{Q}{C} = V \Rightarrow V = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$

$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{V^2 C}{2}$

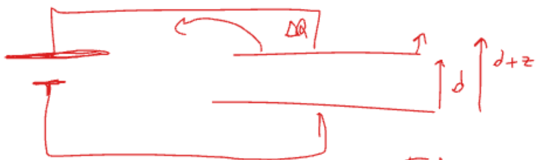
1) $\vec{F} = \underbrace{-\nabla U}_{d \to d+z}\Big|_{Q = cte} = -\frac{\partial U}{\partial z}\Big)_Q \hat{k} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\frac{\partial (d+z)}{\partial z}\Big|_{z=0}\hat{k} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\hat{k} \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}}{S} = -\frac{\sigma^2 \cancel{S^2}}{2\varepsilon_0 \cancel{S^2}}\hat{k} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

2) esto está MAL $\quad \vec{F} = -\nabla U\Big|_{V_0 = cte} = -\frac{\partial U}{\partial z}\Big)_{V_0}\hat{k} = -\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{d+z}\right)\Big|_{z=0}\hat{k} = \frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2}\frac{1}{d^2}\hat{k} \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{F}}{S} = \frac{\varepsilon_0 \cancel{S}}{2d^2}\frac{Q^2 d^2}{\varepsilon_0^2 S^2}\cdot\frac{1}{\cancel{S}}\hat{k} = \frac{\sigma^2 \varepsilon_0 \cancel{S}}{2\varepsilon_0^2 \cancel{S}}\hat{k}$

$d \to d+z$

$= \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0^2}\hat{k}$ difiere el signo!!

Porque la variación de la energía pot. elec. no se debe solo a la acción del agente externo.



La batería hace trabajo llevándose o trayendo carga ΔQ

$F_0 d = E_1 (d+z)$

¿Cuánto trabajo? $dQ\, V_0$

$F_{ext}\Delta z = -F_{el}\Delta z$

$\Delta U = W_{agente\ ext} + W_{bateria}$

$\Rightarrow F_{el,z} = -\frac{\Delta U}{\Delta z} + V_0 \frac{\Delta Q}{\Delta z}$