Series de Fourier

Motivación: útiles para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y con derivadas parciales con condiciones de borde periódicas.

Definición: Una función periódica puede describirse cómo

$$f(x): \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

tal que $\exists T$ para el cual $f(x+T) = f(x)$

Por inducción, una función cómo esta verificaría $f(x+nT) = f(x)$

Definición: Una serie de Fourier es la representación de una función periódica cómo una suma de senos y cosenos:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)}$$

Los coeficientes a_n y b_n se definen de la siguiente manera:

función par $\rightarrow b_n = 0 \ \forall n$

función impar $\rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}}$$

(si las integrales existen)

Condiciones suficientes para $f(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \text{ Número finito de discontinuidades finitas} \\ \cdot \text{ Número finito de valores extremos} \end{array}\right\} \text{funciones "regulares por bloques"}$$

$\rightarrow$ Condiciones de Dirichlet

En el espacio de Hilbert las funciones seno y coseno forman un conjunto completo ortogonal.

En forma exponencial:

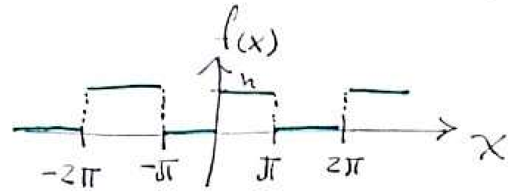
$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ c_0 &= \frac{1}{2}a_0 \end{aligned}}$$

Cambio de intervalo: para una función de período $2L$ se puede escribir:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}}$$

Ejemplo: Señal cuadrada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ h & 0 < x < \pi \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dt + \int_{0}^{\pi} h\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\,dt = h$$

Similarmente: $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\cos(nt)\,dt = \frac{h}{n\pi}(+\operatorname{sen}(nt))\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\operatorname{sen}(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot h\,\frac{-\cos(nt)}{n}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{h}{n\pi}\left(\cos(n\pi) + \cos(0)\right) = \frac{h}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2h}{\pi}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

La serie resultante es entonces:

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots \right)$$

$$= \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2j+1)x}{2j+1}$$

Nótese que la función $f(x) - \frac{h}{2}$ es impar, por tanto sólamente nos quedan los coeficientes no nulos para las funciones seno de la serie de Fourier.

Propiedades de las series de Fourier

Convergencia

Las series de Fourier de funciones continuas o discontinuas siempre convergen al promedio de la función:

$$TF(f)(a) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to a^-} f(x)\right]$$

Las series de Fourier no convergen uniformemente para funciones discontinuas. Si convergen uniformemente si:

- → $f(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$
- → $f(-\pi) = f(\pi)$
- → $f'(x)$ es continua por bloques

Integración

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \frac{a_0 x}{2}\Big|_{x_0}^{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}(nx)\Big|_{x_0}^{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cdot \cos(nx)\Big|_{x_0}^{x}$$

$\int_{x_0}^{x} f(x)dx - \frac{1}{2} a_0 x$ sigue siendo una serie de Fourier.

Diferenciación

Al diferenciar término a término se debe verificar siempre que la serie obtenida converja.

Dado que la diferenciación añade un factor n a cada término de la serie, esto reduce la taza de convergencia y podría hacer que la serie diverja.

Las condiciones de convergencia uniforme se pueden aplicar para permitir la diferenciación término a término.

Igualdad de Parseval

Si la serie de Fourier de $f(x)$ es uniformemente convergente, se puede demostrar que:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Transformaciones Integrales

Las transformaciones integrales relacionan 2 funciones f y g de la siguiente manera:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{transformada} \\ \text{de } f}}{g(\alpha)} = \int_a^b f(t)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{núcleo (Kernel)}}}{K(\alpha,t)}\,dt$$

Se puede entender como el **mapeo** de una función $f(t)$ (en el espacio t) mediante una función $g(\alpha)$ (en el espacio α).

Ejemplos de espacios α y t: frecuencia y tiempo.

Transformada de Fourier

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \qquad \text{Original}$$

$$g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \qquad \text{T.F. con cosenos}$$

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\, \mathrm{sen}(\omega t) dt \qquad \text{T.F. con senos}$$

Esta transformada es útil cuándo se estudian fenómenos descritos mediante ondas.

Transformada de Fourier de una Gausiana

Tomamos en cuenta una función gausiana de la forma

$$g(t) = e^{-a^2t^2} = \exp(-a^2t^2)$$

Tomamos el exponente y completamos el cuadrado:

$$-a^2t^2 + i\omega t = -a^2\left(t - \frac{i\omega}{2a^2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2}$$

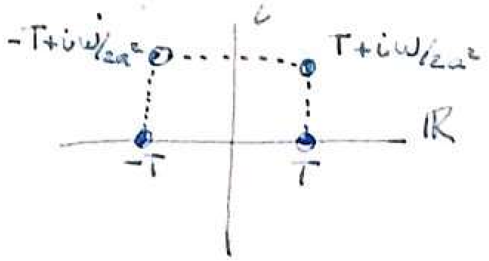
Entonces tenemos:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a^2(t - i\omega/2a^2)^2]\, dt$$

Hacemos el siguiente cambio de variable: $t \rightarrow t + \frac{i\omega}{2a^2}$

$$\Rightarrow \quad g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2} dt$$

Justificación: aplicar el teorema de Cauchy al rectángulo



y hacer que $T \to \infty$. El integrando no tiene singularidades en este intervalo y las integrales sobre los lados $\pm T$ a $\pm T + i\omega/2a^2$ son despreciables para $T \to \infty$

Finalmente: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2}d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$

Sustituyendo: $\displaystyle g(\omega) = \frac{1}{a\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)$

$g(\omega)$ es otra gaussiana en el espacio ω.

Utilidad de las transformadas integrales:

Ejemplo: filtros en imágenes o señales

espacio real $\to$ convolución

espacio de Fourier $\to$ multiplicación

¿Cómo representar una función no periódica en el intervalo $(-\infty, \infty)$?

→ Significado físico: resolver un paquete de ondas en senos y cosenos.

Integral de Fourier

Si desarrollamos una función $f(x)$ según sus coeficientes de Fourier obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \underbrace{\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt}_{a_n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \underbrace{\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt}_{b_n}$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}(t-x)dt$$

Ahora hacemos $[-L, L] \longrightarrow (-\infty, \infty)$

$$\frac{n\pi}{L} = \omega \qquad \frac{\pi}{L} = \Delta\omega$$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega(t-x))dt$$

Al límite:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega(t-x))\,dt$$

Nota: El término $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$

desaparece si la integral existe.

Condiciones para $f(x)$:

- continuidad por bloques
- diferenciabilidad por bloques
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ finita.

Para obtener la forma exponencial observamos que: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}\,\omega(t-x)\,dt = 0$

porque el seno es una función impar de ω.

Sumando la expresión anterior con la integral de Fourier obtenemos el teorema de Fourier:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\omega t}\,dt}$$

Función Delta de Dirac

La función delta de Dirac se entiende cómo una sucesión de funciones $\delta_n(t-x)$ que cumplen con la propiedad:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta_n(t-x)\,dt.$$

Una posible representación de la sucesión δ_n es:

$$\delta_n(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} e^{i\omega(t-x)}\,d$$

De tal manera que:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-n}^{n} e^{i\omega(t-x)}\,d\omega\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}\,d\omega \right\}}_{\delta(t-x)} dt$$

ésta es la misma ecuación del teorema de Fourier.

$$\Rightarrow \boxed{\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}\,d\omega}$$ delta de Dirac

Generalización: transformada de Fourier y su inversa en 3 dimensiones.

$$\boxed{\begin{aligned} g(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 r \\ f(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 r \end{aligned}}$$

Transformada de derivadas

Sea la función $g_d(\omega)$ la transformada de $f'(x)$:

tenemos: $$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ tenemos:

$$g_1(\omega) = -\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

$$\Rightarrow \quad g_1(\omega) = -i\omega\, g(\omega)$$

Generalizando a la derivada n-ésima:

$$g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega)$$

(todas las partes integradas deben $\to 0$ para $x \to \infty$)

La operación de derivación se reduce a una multiplicación en el espacio de la transformada.

Función Delta de Dirac

Se define la función delta cómo aquella que cumple las siguientes propiedades:

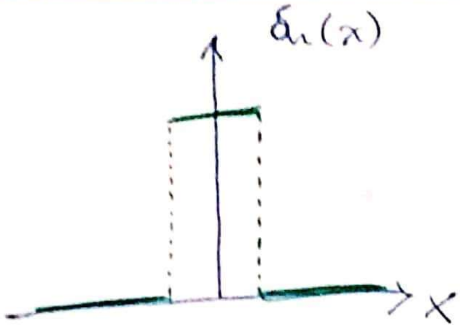
$$\boxed{\begin{gathered} \delta(x)=0, \quad x \neq 0 \\ f(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx \end{gathered}}$$

Caso especial $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$, para $f(x)=1$.

Hay muchas maneras de definir una función que cumpla estas propiedades cómo el límite de una sucesión de funciones $\delta_n(x)$ ya que una función $\delta(x)$ no existe como función en sí.

Ejemplo:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & -1/2n < x < 1/2n \\ 0, & |x| > 1/2n \end{cases}$$



Ejemplo de una secuencia de funciones que tiende a $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0)$$

$\uparrow$

no es una integral sino un límite

Propiedades de la función delta:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_{\substack{a \\ g(a)=0 \\ g'(a)\neq 0}} \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta'(x-x_1)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \delta(x-x_1)\, dx$$

$$= -f'(x_1)$$

De esta manera podemos definir el operador lineal:

$$\mathcal{L}(x_0) f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

En coordenadas esféricas (en 3D):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\delta(\vec{r})\, r^2 dr \, \text{sen}\,\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \iiint_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dx\,dy\,dz = 1$$

Integral de Fourier de la función Delta de Dirac

Una posible representación en forma integral de la función delta de Dirac es la siguiente:

$$\delta_n(t-x) = \frac{\text{sen}\, n(t-x)}{\pi(t-x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\exp(i\omega(t-x))\,d\omega$$

que cumple con:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta_n(t-x)\,dt$$

Entonces se obtiene una representación útil en forma integral de la función delta:

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega(t-x))\,d\omega$$

Por otra parte, si aplicamos la transformada de Fourier a la función delta obtenemos:

$$TF[\delta(t-x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-x)\,e^{i\omega t}\,dt = e^{i\omega x} = TF[\delta(t-x)](\omega)$$

$$TF^{-1}(e^{i\omega x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-t)}\, d\omega = 2\pi\, \delta(x-t)$$

$$= 2\pi\, \delta(t-x)$$

$$\Rightarrow TF^{-1}\left[TF\left[\delta(t-x)\right]\right] = \delta(t-x) \quad \text{OK}$$

Teorema de la Convolución

__Definición:__ Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ con transformadas $F(t)$ y $G(t)$ respectivamente, entonces definimos

$$f * g \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(x-y)\, dy$$

como la convolución entre f y g en el intervalo $(-\infty, \infty)$. ("faltung")

Introducimos la transformada de Fourier inversa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-it(x-y)}\, dt\, dy = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{ity}\, dy \right] dt \left(e^{-itx}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, G(t)\, e^{-itx}\, dt$$

La transformada de Fourier inversa del producto de transformadas es la convolución de las funciones originales f y g.

Relación de Parseval

Tomamos la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}\, \frac{1\, d\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)\, e^{ixt}\, dx\, dt$$

Aquí $*$ denota la conjugación compleja.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-\omega)}\, dt\, dx\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)\, \delta(x-\omega)\, dx\, d\omega$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G^*(\omega)\, d\omega}$$

↳ relación de Parseval.