<u>Geodesicas nulas en Schwarzschild – deflección de la luz.</u>

– Rayos de luz siguen geodesicas con tangentes nulos, o luminales:

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \qquad \text{si } \lambda \text{ es un parametro por la geodesica}$$

– Realmente esto es una aproximación que vale en el límite de longitud de onda corta – la aproximación de optica geometrica. En general luz es gobernado por las ecuaciones de Maxwell en espacio tiempo curvo.

– Geodesicas nulas se pueden caracterizar como los puntos estacionarias de la acción

$$I = \int \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \, d\lambda$$

y la condición $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$ en la solución

El momento canónico es $p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$ y la ecuación de Euler-Lagrange es

$$0 = \frac{d}{d\lambda} g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu g_{\sigma\rho}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho = g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \dot{x}^\sigma\left[\partial_\sigma g_{\mu\rho} - \tfrac{1}{2}\partial_\mu g_{\sigma\rho}\right]\dot{x}^\rho$$

$$= g_{\mu\nu}\left[\ddot{x}^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\rho}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho\right]$$

Esto es la ecuación de una geodesica con λ un parametro afín. Así en puntos estacionarios λ es un parametro afín.

– Nota además que si $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$ en un punto sobre la geodesica entonces vale en todos los demás:

La ecuacion de la geodesica se puede escribir como

$$0 = \nabla_p p \qquad \text{—} \qquad p^\mu = \dot{x}^\mu$$

Además $\nabla g = 0$. Entonces $\nabla_p\, g(p,p) = \nabla_p g(p,p) + g(\nabla_p p, p) + g(p, \nabla_p p) = 0$

$\Rightarrow g(p,p) = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ es constante a lo largo de una geodesica

Entre las soluciones, hay una con λ escalada tal que p^μ es cualquier 4-momentum que queremos. — La línea mundo no depende de 4-momento p, mientras la longitud de onda es suficientemente corta que vale la aproximación de optica geometrica y p^μ es suficientemente chico tal que la partícula no tiene un importante campo gravitatorio propio.

- Alternativamente podríamos usar la acción $I = \int \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \varphi \, d\lambda$, pero para este problema no tiene ventaja.

- Como en el caso de la partícula con masa, el hecho que $g_{\mu\nu}$ es independiente de t y ϕ implica que p_t y p_ϕ se conservan.

- De la misma manera como para la partícula con masa podemos aprovechar la libertad de girar las coordenadas esfericas θ, ϕ para demostrar que la geodesica permanece en un plano que identificamos con $\theta = \frac{\pi}{2}$

- Vamos a <u>definir</u> $e = p_t$ ← igual que antes pero <u>sin dividir por m</u>.

$$\ell = p_\phi$$

- La ecuación radial es

$g^{rr} \; g_{r\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \; g_{r\rho}\frac{dx^\rho}{d\lambda}$

$$0 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\ell^2$$

$g^{\phi\phi}$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$

Podríamos haber encontrado la ecuación radial para partículas con masa a partir de $-m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$.

- Multiplicando por $\frac{1}{\ell^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ da ← supongamos que $\ell \neq 0$

$$0 = -\frac{e^2}{\ell^2} + \frac{1}{\ell^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

<u>Def^n</u> $b = \left|\frac{\ell}{e}\right|$, $W_{eff}(r) = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\ell^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + W_{eff}(r)$$ ← ecuación radial para geodesicas nulas no radiales

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Dado que $\ell = g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{d\phi}{d\lambda} = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$

$$\frac{1}{\ell^2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2$$

$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + W_{eff}(r)$ para geodesicas nulas no radiales

- A diferencia del caso no nulo hay solo un parametro, b, en lugar de dos, e y ℓ.

<u>¿Que significa b?</u>

Si la geodesica llega hasta $r=\infty$ entonces b es el parametro de impacto.

Definimos $x^1 = x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$

$x^2 = y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

$x^3 = z = r\cos\theta$

- si $r \gg r_s = 2M$ entonces estas coordenadas^i son aproximadamente Cartesianas.

De hecho $ds^2 \simeq -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$\partial_\phi x^i = \begin{bmatrix} -r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ r\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = [\hat{z} \times \vec{r}]^i$$

para $r \gg r_s$

- $\ell = p_\phi = g(\partial_\phi, p) = \partial_\phi x^i \delta_{ij} p^j = (\hat{z}\times\vec{r})\cdot\vec{p} = \hat{z}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = L_z$

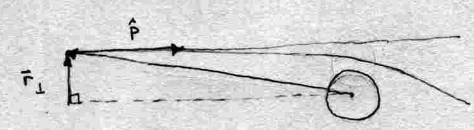
- Porque la geodesica es <u>nula</u> $-e^2 + \|\vec{p}\|^2 = 0$

versor en direccion de $\vec{p}$

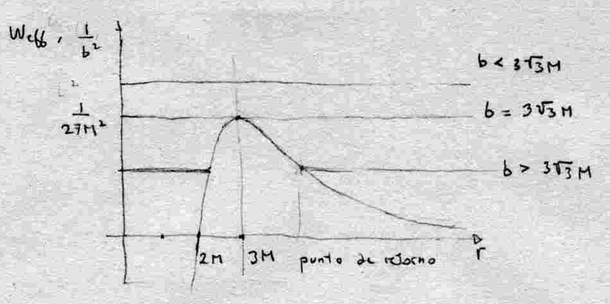
$$\Rightarrow b = \left|\frac{L}{e}\right| = \left|\hat{z}\cdot\left(\vec{r}\times\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}\right)\right| = |\hat{z}\cdot(\vec{r}\times\hat{p})| = \|\vec{r}_\perp\|$$

con $\vec{r}_\perp$ el componente de $\vec{r}$ perpendicular a $\vec{p}$ en el plano perpendicular a $\hat{z}$

$\Rightarrow$ b es efectivamente lo que se llama parametro de impacto.



¿Como son las trayectorias de la luz?



$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + W_{eff}(r)$$

con $W_{eff}(r) = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$

$$= \frac{1}{r^2} - \frac{2M}{r^3}$$

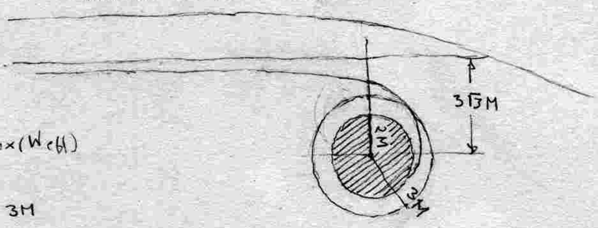
- Máximo de W_{eff}

$$0 = \frac{dW_{eff}}{dr} = -\frac{2}{r^3} + \frac{6M}{r^4} \iff 0 = r - 3M \implies r = 3M$$

$$\implies \max(W_{eff}) = W_{eff}(3M) = \frac{1}{9M^2}\left(1 - \frac{2M}{3M}\right) = \frac{1}{27M^2} = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}M}\right)^2$$

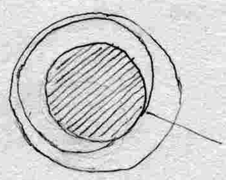
• Trayectorias

- $b < 3\sqrt{3}M \implies \frac{1}{b^2} > \frac{1}{27M^2} = \max(W_{eff}) \implies$ trayectoria entrante llega hasta $r = 0$ (2M), saliente hasta $r = \infty$.



- caso límite $b = 3\sqrt{3}M \implies \frac{1}{b^2} = \frac{1}{27M^2} = \max(W_{eff})$
  - órbita circular inestable de luz en $r = 3M$

- $b > 3\sqrt{3}M \implies \frac{1}{b^2} < \frac{1}{27M^2} = \max(W_{eff})$
  - trayectoria entrante desde $r = \infty$ se acerca hasta un r de retorno, $\frac{1}{b^2} = W_{eff}(r_{retorno})$, y luego se aleja de vuelta. Este es el caso relevante para el doblamiento de luz por el sol ya el radio de la fotosfera $R_\odot \gg 3\sqrt{3}M$



  - trayectoria a partir de un punto con $2M < r < 3M$: la trayectoria sube y luego cae de vuelta hacia $r = 2M$

¿Como se ve el horizonte de un agujero negro desde lejos?

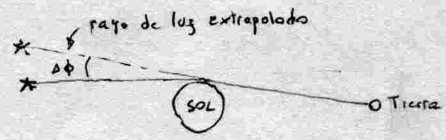
- Los rayos de luz que llegan al observador y que extrapolado hacia atrás como si el espacio tiempo fuera plano pasan a una distancia menor a $3\sqrt{3}M$ del centro del agujero provienen del horizonte. $\implies$ El horizonte parece una esfera de radio $3\sqrt{3}M$

¿Y que se ve allí?

Se ve todo lo que alguna vez cayó en el agujero, congelado justo encima $r = 2M$

- pero enrojeciendose y oscureciendose tal que pronto el horizonte se practicamente negro.
- En adición se ve un brillo uniforme, la radiación de Hawking. Pero para un agujero negro de masa estelar o mas este es muy, muy débil.

Doblamiento de luz por el Sol



Aquí $'$ significa $\dfrac{d}{d\phi}$

Def^n $\quad w = \dfrac{b}{r}$

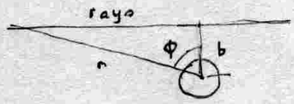
Ec^n radial es $\quad 1 = w'^2 + w^2 - \dfrac{2M}{b} w^3$

- Luz de estrellas debe pasar fuera de la fotosphere y va casi recto, Así $b \geq R_\odot$

$$\Rightarrow \quad \frac{M}{b} \leq \frac{1.47\,\text{km}}{6.96\times10^5\,\text{km}} = 2.11\times10^{-6} \ll 1$$

Vamos a buscar la solución a la ecuación radial solo hasta primer orden en $\dfrac{M}{b}$

- Primero la solución de orden cero = la solución sin el ultimo término en la ec^n radial:
  - Probamos con $w(\phi) = \dfrac{b}{r(\phi)}$ correspondiente a propagación en una linea recta (interpretando r y ϕ como coordenadas polares en el plano Euclideo)
  - ponemos $\phi = 0$ en el punto de mayor acercamiento del rayo al origen



$$\Rightarrow \quad b = r\cos\phi \quad \Rightarrow \quad w = \cos\phi$$

$w'^2 + w^2 = \text{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$ ✓ Es una solucion

- Ahora hallamos la corrección de primer orden en $\dfrac{M}{b}$ a esta solución

Primero diferenciamos a la ecuacion radial en ϕ

$$\Rightarrow \quad 0 = 2w'w'' + 2w'w - \frac{6M}{b} w'w^2 \quad \Rightarrow \quad o \quad w' = 0$$ — orbita circular. No nuestro caso.

$$o \qquad w'' + w = \frac{3M}{b} w^2.$$

Si la solución es de la forma $w(\phi) = \cos\phi + \frac{M}{b} f_1(\phi) + \left(\frac{M}{b}\right)^2 f_2(\phi) + \ldots$

entonces hasta primer orden en $\frac{M}{b}$

$$w'' + w = \frac{3M}{b}\cos^2\phi \qquad \cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\phi = \frac{\cos 2\phi + 1}{2}$$

$$\Rightarrow w = \cos\phi + \frac{3}{2}\frac{M}{b} + A\cos 2\phi \quad \text{con} \quad -4A + A = \frac{3}{2}\frac{M}{b} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}\frac{M}{b}$$

$$= \cos\phi + \frac{3}{2}\frac{M}{b} - \frac{1}{2}\frac{M}{b}\cos 2\phi$$

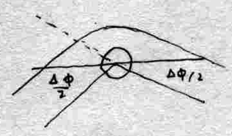
$$= \cos\phi + 2\frac{M}{b} - \frac{M}{b}\cos^2\phi$$

- Es fácil verificar que esta solución satisface la original ecuación radial hasta primer orden en $\frac{M}{b}$.

- Ahora ¿ cuanto es el angulo $\Delta\phi$ por el cual la luz es doblada ?

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\phi}{2}\right) + \frac{3}{2}\frac{M}{b} - \frac{1}{2}\frac{M}{b}\cos(\pi + \Delta\phi)$$

$$= -\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}_{\frac{\Delta\phi}{2}} + \frac{3}{2}\frac{M}{b} + \frac{1}{2}\frac{M}{b}\underbrace{\cos(\Delta\phi)}_{1}$$



$$\Rightarrow \frac{\Delta\phi}{2} = \frac{3}{2}\frac{M}{b} + \frac{1}{2}\frac{M}{b} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{4M}{b} = 8.44 \times 10^{-6} = 1.74''$$ segundos de arco

Esto es el desplazamiento angular hacia afuera predicho para las imagenes de las estrellas que se ven justamente en el borde de la fotosphera (o la Luna en un eclipse total)

Es la predicción que confirmo Eddington.