Electromagnetismo (2021)

Práctico 7

Corriente eléctrica y ley de Ohm

se introdujo el concepto de densidad de Corriente $\vec{J}$

Visión Microscópica
tiene una def. estadística sobre el comp. microscóp. de los portadores de carga

Para trabajar con mat. vamos a relacionar $\vec{J}$ con el campo $\vec{E}$.

y definimos la cond. g como $\vec{J} = g\vec{E}$

Desde que se aplica $\vec{E}$ (o varía) hasta que se termaliza pasa un tiempo τ_{rel} que, en gral., vamos a considerar despreciable.

g caracteriza como responden los portadores al campo aplicado.

(la resistividad $\tilde{\rho}$ se define como $\frac{1}{g} = \tilde{\rho}$)

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$0 = \nabla \cdot (g\vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$0 = g \nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$0 = \frac{g}{\varepsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

5. La figura muestra una esfera conductora de radio R inmersa en dos medios que poseen permitividades y conductividades eléctricas diferentes. El medio con propiedades ε_1, g_1 consiste en un cascarón esférico de radio interior R y radio exterior $6R$ concéntrico con la esfera conductora. El medio con propiedades ε_2, g_2 se extiende desde el radio $6R$ al infinito. La esfera conductora se mantiene a un potencial V constante.

   a) Calcular el campo de densidades de corriente $\vec{j}(\vec{r})$ en todo el espacio exterior a la esfera conductora.

   b) ¿Existe densidad de carga libre en la superficie de los dos medios? En caso afirmativo calcular dicha densidad de carga libre. En caso negativo, dar las condiciones que deben satisfacer las permitividades y conductividades de ambos medios.

conductor — R

ε_1, g_1 — $R < r < 6R$

ε_2, g_2 — $r > 6R$

$$\vec{J} = g\vec{E}$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J} = g\,\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} g$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

I) hallamos φ

II) hallamos $\vec{E} = -\nabla\varphi$

III) hallamos $\vec{J} = g\vec{E} = -g\nabla\varphi$

Hallemos φ $\quad \nabla^2 \varphi = 0$

I) Por la sim. voy a usar coord. esf.

II) $\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \varphi_I(r,\theta) & \text{si } R<r<6R \\ \varphi_{II}(r,\theta) & \text{si } r>6R \end{cases}$ $\qquad \varphi_i(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(A_n^{(i)} r^n + \frac{B_n^{(i)}}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta)$

III) c.b.

c1) $\varphi(R,\theta) = \varphi_I(R,\theta) = V$

c2) $\lim_{r\to\infty} \varphi(r,\theta) = \lim_{r\to\infty} \varphi_{II}(r,\theta) = 0$

c3) $\lim_{r\to 6R^-} \varphi(r,\theta) = \lim_{r\to 6R^+} \varphi(r,\theta)$ $\leftarrow$ que es $\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a = -\int \vec{E}\cdot d\ell$

si $b = 6R^+$, $a = 6R^-$ $\quad = -\int_{6R-\varepsilon}^{6R+\varepsilon} E(r)\hat{e}_r \cdot dr\, \hat{e}_r$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} E(6R) 2\varepsilon = 0$

c4) ¿ $\nabla\cdot\vec{D} = 0$? $\qquad$ ¿ $\nabla\cdot\vec{J} = 0$?

¿qué es esto? $\qquad$ ¿Qué es esto?

¡¡ NO HAY CARGA LIBRE !! $\qquad$ ¡¡ La carga no varía en el tiempo !!

(NO TENEMOS IDEA DE SI $\rho_f = 0$ en $r = 6R$) $\qquad$ (¡ESTO SÍ!)

C4) $\nabla\cdot\vec{J} = 0$

$\Rightarrow \lim_{r\to 6R^-} g\nabla\varphi = \lim_{r\to 6R^+} g\nabla\varphi$

$\Rightarrow g_I \left.\frac{\partial\varphi_I}{\partial r}\right|_{r=6R} = g_{II} \left.\frac{\partial\varphi_{II}}{\partial r}\right|_{r=6R}$

IV) Impongo las Cdc. para hallar $A_n^{(i)}$ y $B_n^{(i)}$.

c1) $\underbrace{1}_{P_0(\cos\theta)} . V = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^{(I)} R^n + \frac{B_n^{(I)}}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \Rightarrow A_n^{(I)} R^n + \frac{B_n^{(I)}}{R^{n+1}} = \delta_{n0} V$ ↗ $B_0^{(I)} = VR - A_0^{(I)} R$

$B_n^{(I)} = - A_n^{(I)} R^{2n+1}$ si $n \neq 0$

c2) $\lim_{r\to\infty} \varphi_{II}(r,\theta) = 0 = \lim_{r\to\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(A_n^{(II)} r^n + \cancel{\frac{B_n^{(II)}}{r^{n+1}}}^{\,0} \right) P_n(\cos\theta)$

$\Rightarrow \underline{A_n^{(II)} = 0} \quad \forall n$

c3) $\left. \overbrace{(V - A_0^{(I)})}^{B_0^{(I)}} \frac{R}{r} + A_0^{(I)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(I)} \left(r^n - \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \right|_{r=6R} = \left. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n^{(II)}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \right|_{r=6R}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{B_0^{(II)}}{6R} = A_0^{(I)} + \frac{V - A_0^{(I)}}{6}}$ (*1) y $A_n^{(I)} R^n \left(6^n - \frac{1}{6^{n+1}} \right) = \frac{B_n^{(II)}}{6^{n+1} R^{n+1}}$ $n \neq 0$

$\boxed{A_n^{(I)} R^{2n+1} \left(6^{2n+1} - 1 \right) = B_n^{(II)}}$ (*2)

C4)

$$\left.\frac{\partial \varphi_I}{\partial r}\right|_{6R} = \left(A_0^{(I)} - V\right)\frac{R}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(I)}\left(n r^{n-1} + (n+1)\frac{R^{2n+1}}{r^{n+2}}\right) P_n(\cos\theta)\Bigg|_{r=6R} = \frac{A_0^{(I)} - V}{36R} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^{(I)} R^{n-1}\left(n 6^{n-1} + \frac{(n+1)}{6^{n+2}}\right) P_n(\cos\theta)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r}\right|_{6R} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{B_n^{(II)}}{r^{n+2}} P_n(\cos\theta)\Bigg|_{6R} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{B_n^{(II)}}{6^{n+2} R^{n+2}} P_n(\cos\theta)$$

$$g_I \left.\frac{\partial \varphi_I}{\partial r}\right|_{r=6R} = g_{II}\left.\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r}\right|_{r=6R}$$

$$\boxed{+\frac{B_0^{(II)}}{\cancel{36}R^{2}}\, g_{II} = \left(V - A_0^{(I)}\right)\frac{g_I}{36\cancel{R}}} \quad *3$$

$$\boxed{A_n^{(I)} \,\text{cte} = B_n^{(II)} \quad \neq R^{2n+1}\left(6^{2n+1}-1\right)} \quad *4 \quad n \neq 0$$

$*2$ y $*4$ implican $A_n^{(I)} = B_n^{(II)} = 0 \quad n \neq 0$

$$B_0^{(II)} = \left(6A_0^{(I)} + V - A_0^{(I)}\right)\cancel{R} = \left(V - A_0^{(I)}\right)\frac{g_I}{g_{II}}\cancel{R}$$

$$\Rightarrow A_0^{(I)}\left(5 + \frac{g_I}{g_{II}}\right) = V\left(\frac{g_I}{g_{II}} - 1\right) \Rightarrow A_0^{(I)} = V\,\frac{g_I - g_{II}}{5 g_{II} + g_I}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_0^{(II)} = VR\left(1 - \frac{g_I - g_{II}}{5 g_{II} + g_I}\right)\frac{g_I}{g_{II}} = VR\,\frac{6 g_I}{5 g_{II} + g_I}}$$

$$(V - A_0^{(I)})\frac{R}{r} + A_0^{(I)}$$

$$\Rightarrow \varphi(r,\theta) = \begin{cases} V\left[\dfrac{g_I - g_{II}}{5g_{II}+g_I}\left(1-\dfrac{R}{r}\right) + \dfrac{R}{r}\right] & \text{si } R<r<6R \\ V\dfrac{R}{r}\dfrac{6g_I}{5g_{II}+g_I} & \text{si } r>6R \end{cases}$$

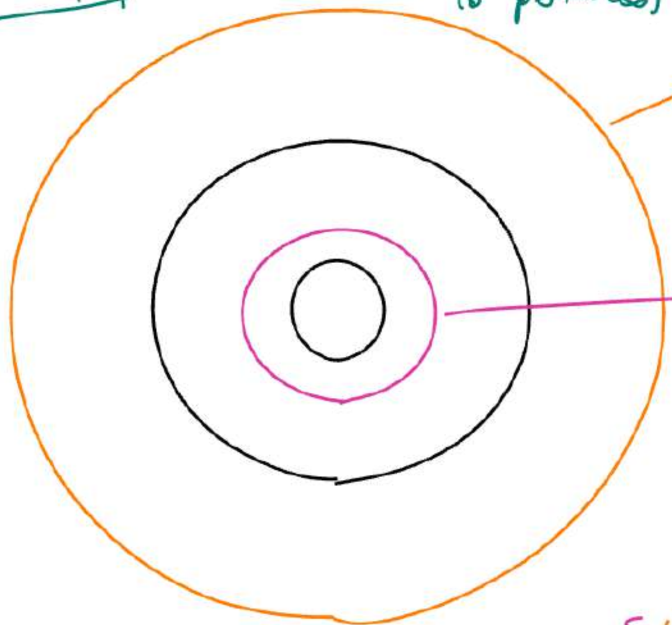
$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \begin{cases} -g_I \nabla\varphi_I & \text{si } R<r<6R \\ -g_{II}\nabla\varphi_2 & \text{si } r>6R \end{cases}$$

b) $$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_F \rightarrow \left(\varepsilon_{II}\vec{E}_{II} - \varepsilon_I\vec{E}_I\right)\cdot\hat{n} = \sigma_F$$

$$\Rightarrow \varepsilon_I \frac{\partial\varphi_I}{\partial r}\bigg|_{r=6R} - \varepsilon_{II}\frac{\partial\varphi_{II}}{\partial r}\bigg|_{r=6R} = \sigma_F$$

otro enfoque: Gauss (la simetría lo permite)

$r = 6R$



$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{6R}+Q_R}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_R}{\varepsilon_0}$$

$$-\int_\infty^R \vec{E}\cdot d\vec{l} = V$$

$$-\left[\int_\infty^{6R} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{6R}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l}\right] = V$$

reg. est.

$$(\nabla\cdot\vec{J} = 0)$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_I \\ \vec{E}_{II} \end{cases} \rightarrow g_I \vec{E}_I\Big|_{r=6R} = g_{II}\vec{E}_{II}\Big|_{r=6R}$$