RELATIVIDAD GENERAL 2021 Clase 23 Michael Reisenberger

Fuente de gravedad

Hartle cap. 22

- En teoría Newtoniana la fuente de gravedad es la masa inercial.
- Mas precisamente, en la ecuacion de campo $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$

la fuente es la densidad de maso en 3-espacio

¿ Como hacemos en relatividad ?

Miramos primero electromagnetismo en relatividad especial en coordenadas Lorentzianas

- La fuente del campo eléctrico en electrostática es la carga electrica.

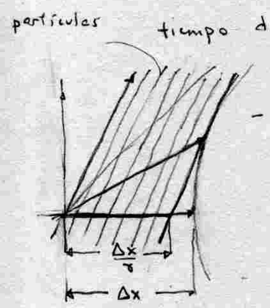
Mas precisamente, en la ecuacion de campo $\nabla^2 \varphi = \rho_e$ la fuente ρ_e es le densidad de carga en 3-espacio.

- En el caso sencillo que todas las partículas fuente tienen la misma carga q

$$\rho_e = q \rho_n$$

con ρ_n la densidad de numero de partículas = numero de partículas por unidad de volumen.

- ρ_n no es un escalar bajo transformaciones de Lorentz, pero mas bien el componente tiempo de un 4-vector, la 4-corriente de numero N^α:



- supongamos que unas partículas tienen todas le misme 4-velocidad u y densidad de numero N en su referencia de reposo.

$\Rightarrow$ en un referencia en que las partículas tienen 3-velocidad $\vec{v}$ tienen densidad γN con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

¿ Porque ? Supongamos que $\mathcal{N}$ partículas una caja de dimensiones $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ en el referencial de reposo. En el referencia en que las partículas y la caja tienen velocidad v según el eje x este tiene dimensiones $\frac{\Delta x}{\gamma}, \Delta y, \Delta z$

$$\Rightarrow \text{ la densidad es } \gamma \frac{\mathcal{N}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \gamma N.$$

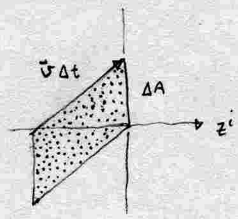
La densidad $\rho_n = \gamma N$ junto con la densidad de corriente de numero N^i forma un 4-vector.

- $N^i(P)$ = el numero de partículas que cruza la superficie $z^i = z^i(P)$ en el sentido de z^i creciente menos el numero que cruza en el sentido contrario, por unidad de area y unidad de tiempo.

- Si todas las partículas tienen la misma 3-velocidad $\vec{v}$ entonces

$$N^i = \rho_n v^i = \gamma N v^i = N u^i$$

Dem: Las partículas que cruzan una porcion de la superficie $z^i = z^i(P)$ de area ΔA en tiempo Δt son los que se encuentran en el prisma del diagrama, con volumen $\Delta A \cdot v^i \Delta t$. Así $N^i = \rho_n v^i$. ☒

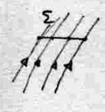


$\Rightarrow$ $N^\alpha = N u^\alpha$, que es un campo 4-vectorial

- si hay partículas de distintas velocidades uno puede agruparlos en familias con (casi) la misma velocidad. La 4-corriente de numero es la suma de las 4-corrientes de las familias $N^\alpha = \sum_I N_I u_I^\alpha$ — todavía un campo 4-vectorial.

Perspectiva de flujos

N^α = densidad de flujo de partículas a traves de la 3-superficie z^α = constante, en sentido de z^α creciente



· Si Σ es una region del 3-plano z^0 = constante, entonces numero de partículas en Σ es

$$\int_\Sigma N^0 dz^1 dz^2 dz^3 = \int_\Sigma N^\alpha n_\alpha dz^1 dz^2 dz^3 \qquad n_\alpha = \delta^0_\alpha$$

- la direccion de lineas mundo es hacia futuro

· Si Σ es una region de la superficie z^1 = constante entre tiempo $z^0 = t$ y $z^0 = t + \Delta t$ entonces el numero de particulas que cruzen Σ es

$$\int_\Sigma N^1 dz^2 dz^3 dz^0 = \int_\Sigma N^\alpha n_\alpha dz^2 dz^3 dz^0 \qquad n_\alpha = \delta^1_\alpha.$$

Volvemos a fuentes de campos

- La fuente de campos EM en la ecⁿ de Maxwell $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -j^\beta$ es la 4-corriente electrica, $j^\alpha = q N^\alpha$. ← recuerden que pusimos la carga igual a q para cada partícula fuente para simplificar

¿Podríamos usar la masa en reposo de cada partícula como su carga gravitacional y hacer una teoría de gravedad con una 4-corriente de masa de reposo?

No parece indicado por dos motivos

1. En teoría Newtoniana la fuente de gravedad es la masa inercial

   ¿Porque? Por principio de equivalencia masa gravitacional pasiva = masa inercial.

   Por tercera ley de Newton (= conservación de momento lineal)

   masa gravitacional activa = masa gravitacional pasiva.

   En relatividad la masa inercial de un cuerpo es la energía total del cuerpo (dividido por c^2), y no la suma de masas de reposo.

   P. ej. luz tiene inercia - ejerce presión cuando choca con un espejo. Tambien tendría que producir una aceleracion de reacción de un cuerpo masivo que lo desvia. Entonces debería producir un campo gravitatorio. Pero tiene masa de reposo cero.

2. La fuente de gravedad tendría que ser conservado, al menos en el caso de simetría esferica. Pretendemos que la ecuacion de campo reduce a la ecuación de vacío $R_{\mu\nu} = 0$ donde no hay materia.

   ⇒ Una distribución de materia acotada con simetría esferica tendría como su campo exterior la solⁿ de Schwarzschild, que es estático aun si la fuente no lo es.

   ⇒ M es constante

   - La energía total de un cuerpo aislado es conservado en el tiempo, mientras la suma de masas en reposo de sus partes pueden no serlo. — si un plasma de electrones y positrones se aniquila para formar un gas de fotones desaparece toda la masa en reposo

- Parece entonces que deberíamos tomar a la energía total como la fuente de gravedad.
- Pero la energía no es un escalar, sino el componente tiempo del 4-momento
- A la ves la densidad de 4-momento no es un vector sino los componentes $T^{\alpha 0}$ de un tensor (2,0), el tensor estres-energía, $T^{\alpha\beta}$.

<u>Def^n</u> <u>Tensor estres-energía</u> (o "energía-momento" o "estres")

$T^{\alpha\beta}(P)$ es la densidad de corriente de p^{α} á traves del plano x^{β} = constante en P en la direccion de x^{β} creciente.

- La densidad espacial de energía es la componente $T^{00} = u_{\alpha} u_{\beta} T^{\alpha\beta}$ si u es la 4-velocidad del referencial.

- Una ecuacion de campo tensorial que vale en cualquier referencial debe valer para cualquier u^{α}. Así no debe depender de los valores de los componentes u^{α}. Debe poder escribirse sin referencia a u^{α}.

$\Rightarrow$ La fuente de gravedad en la ecuación de campo debe ser $T^{\alpha\beta}$, o una función de $T^{\alpha\beta}$ como $T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}$.

<u>Tensores de estres-energía</u>

1. <u>Polvo</u>

Un polvo es un gas sin presión, lo cual significa que partículas vecinas tienen velocidad relativa cero. Mas precisamente, hay un campo de 4-velocidad u^{α} del polvo y cada partícula en P tiene 4-velocidad $u^{\alpha}(P)$. (Esto puede parecer vacío pero se supone que u^{α} varia muy poco sobre distancias interpartícula en el polvo. De hecho en el modelo el polvo es un fluido contínuo.)

- en cosmología las galaxias a menudo se tratan como partículas de un polvo.

- Para simplificar supongamos que todas las partículas tienen la misma masa de reposo m

$\Rightarrow$ $p^\alpha = m u^\alpha$ para cada uno

- la densidad de 4-momento es $T^{\alpha 0} = p^\alpha N^0$ con N^0 la densidad de numero de partículas.

- los demas componentes de la densida de corriente de 4-momento son

$T^{\alpha i} = p^\alpha N^i$

- Así $T^{\alpha\beta} = p^\alpha N^\beta$ — cada fila (α) es la 4-corriente de un componente de p, p^α. — p^α en lugar de q

$= m N u^\alpha u^\beta$

$= \rho u^\alpha u^\beta$

ρ es la densidad de energía en el referencial de reposo del polvo.

En este referencial $T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

Fluido perfecto

- Agregamos presión:

- Fluido perfecto $\Longleftrightarrow$ en su local referencial de reposo Lorentziano fluido es isotropico

$\Rightarrow$ T^{ij} no debe identificar ninguna dirección especial

$\Rightarrow$ $T^{ij} = p\,\delta^{ij}$ porque todos valores propios de T^{ij} deben ser iguales

(El tensor estress energía es simetrico en general pero si no lo fuese la condicion de isotropía lo impondra sobre T^{ij} en este caso porque un tensor $[2,0]$ antisimetrico define un vector $t_k = \epsilon_{ijk} T^{ij}$.)

- p es la presión, ya que la densidad de flujo de 3-momento a traves de la superficie de constante z^1 es $T^{i1} = p\,\delta^{i1} = [p,0,0]$.

El flujo de momento a través de una superficie es la tasa con la cual el medio por un lado de la superficie recibe momento del medio por el otro lado
= la fuerza del medio en un lado sobre el medio del otro lado. Especificamente $[p,0,0]$ es la fuerza por unidad de area del fluido en $z^1 < z^1(P)$ sobre el fluido en $z^1 > z^1(P)$

Es perpendicular a la superficie $\Rightarrow$ p es la presión

(Note que no es necesario que las partículas del fluido interactuan entre si para que haya presion del fluido de un lado sobre el fluido del otro lado de un plano. Sería necesario si considerabamos dos fluidos que consisten de conjuntos fijos de partículas, pero aquí el fluido por un lado del plano consiste en cualquier instante de las partículas que se encuentren por ese lado del plano en ese instante. Si una partícula cruza al plano lleva su momento y esto cuenta como una fuerza del fluido de una lado sobre el del otro lado.)

Entonces en su referencia de reposo el tensor de estres-energía de un fluido perfecto es

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{bmatrix}$$

En un referencial Lorentziano cualquiera $\quad T^{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u^\alpha u^\beta + p\,\eta^{\alpha\beta}$

- es simétrico en sus indices
- fluido perfecto caracterizado completamente por sus campos de densidad ρ, presión p, y velocidad u.
- Lo que lo hace "perfecto", es decir una idealización, es el hecho que se ha excluido viscosidad y conducción de calor del modelo
  - viscosidad corresponde a terminos fuera del diagonal en T^{ij}
  - conducción de calor a T^{0i}.
  - tambien estan excluidos presiones no isotropicos como pueden sostener sólidos.

- Fluido perfecto se suele usar todo tipo de materia en cosmología, incluyendo radiacion de todo tipo, y gases y plasmas.

<u>Otros ejemplos</u>:

EM $\quad T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha\epsilon} F^{\beta}{}_{\epsilon} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F^{\delta\epsilon} F_{\delta\epsilon} \right)$

Escalar libre

$$T^{\alpha\beta} = \partial^\alpha \phi\, \partial^\beta \phi - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(\partial^\epsilon \phi\, \partial_\epsilon \phi + m^2 \phi^2 \right)$$

Conservación de 4-momento en relatividad especial

Conservación local de 4-momento se expresa como $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$

- $T^{\alpha\beta}$ es simétrico así podría ser $\partial_\beta T^{\beta\alpha} = 0$, pero con la definición en términos de flujos que di, y no habiendo demostrado la simetría de T, $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ es la expresión correcta.

- Análogo a la conservación local de carga eléctrica $\partial_\beta J^\beta = 0$

Integramos $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ sobre una región espacial Σ

$$0 = \int_\Sigma \partial_\beta T^{\alpha\beta} \, d^3 z = \frac{d}{dt} \int_\Sigma T^{\alpha 0} \, d^3 z + \int_{\partial\Sigma} T^{\alpha i} n_i \, d\text{area}$$

$\Rightarrow$ Tasa de aumento de 4-momento p^α en Σ es igual al flujo entrante de p^α.

Densidades, corrientes, y estrés-energía en coordenadas arbitrarias

- Si abandonamos coordenadas Lorentzianas, como debemos hacer en espacio tiempo curvo entonces hay que incluir factores de $\sqrt{-g}$ en la medida de integración en integrales sobre el espacio tiempo y en flujos á traves de 3-superficies para que los resultados sean independiente de las coordenadas usadas.

- Ya vimos esto en el contexto de la formulación Lagrangeana de teorías de campos.

  La acción es
  $$I_M = \int_M \mathcal{L} \sqrt{-g} \, d^4 x \quad \text{— } M = \text{región de espacio tiempo}$$
  con $\mathcal{L}\sqrt{-g}$ la "densidad Lagrangiana", una función de los campos y sus derivadas

  - a menudo $\mathcal{L}\sqrt{-g}$, o $\mathcal{L}$ se llama simplemente "Lagrangiano", aunque esto también puede significar $L = \int_{\text{espacio}} \mathcal{L} \sqrt{-g} \, d^3 x$

$\sqrt{-g} \, d^4 x$ = elemento de 4-volumen. — Es invariante bajo cambio de coordenadas.

$$\sqrt{-g'} \, d^4 x' = \left(\left(\det \frac{\partial x}{\partial x'} \right)^2 \left(- \det g \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left| \det \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4 x = \sqrt{-g} \, d^4 x$$

$$g'_{\sigma\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} g_{\mu\nu}$$

Entonces $I_{\mathcal{M}}$ es independiente de la eleccion de coordenadas para cada $\mathcal{M}$ ssi $\mathcal{L}$ es un escalar.

- $\mathcal{L}\sqrt{-g}$ no es un escalar sino una densidad escalar de peso 1, porque bajo cambio de coordenadas $\mathcal{L}\sqrt{-g} \longrightarrow (\mathcal{L}\sqrt{-g})' = \left|\det \frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{1} \mathcal{L}\sqrt{-g}$

- Mientras es disponible la densidad escalar de peso 1 $\sqrt{-g}$ podemos escribir cualquier otra como un escalar por $\sqrt{-g}$. Pero no hace falta una metrica para que hay densidades escalares. p.ej. $\sqrt{\det(F_{\mu\nu})}$ con $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}$ el tensor de campo EM es una densidad escalar de peso 1.

- En el caso del flujo de una corriente a traves de una 3-superficie Σ uno podria pensar que habria que insertar un $\sqrt{\det h}$ con h la 3-metrica correspondiente a restringir g a la 3-superficie. pero no! El factor que hay que poner es $\sqrt{-g}$:

Sea v un campo vectorial y x^μ coordenadas tal que x^0 = constante en Σ. Entonces

$$\text{Flujo de } v \text{ a traves de } \Sigma = \int_\Sigma v^0 \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 \quad \text{es invariante}$$

(en sentido x^0 creciente)

Si cambiamos a otras coordenadas, x'^μ tal que x'^0 = constante en Σ (y creciente con x^0)

$\Rightarrow \frac{\partial x'^0}{\partial x^i} = 0$ porque $\frac{\partial}{\partial x^i}$ es tangente a Σ. $\Rightarrow \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}$ diagonal en bloques 1×1, 3×3

$$\Rightarrow \det_4\left[\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\right] = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \det_3\left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\right]$$

$$\int_\Sigma v^0 \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 = \int_\Sigma v'^0 \cancel{\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}} \sqrt{-g'} \cancel{\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}} \left|\det_3 \frac{\partial x'}{\partial x}\right| \cancel{\left|\det_3 \frac{\partial x}{\partial x'}\right|} dx'^1 dx'^2 dx'^3$$

$$= \int_\Sigma v'^0 \sqrt{-g'}\, dx'^1 dx'^2 dx'^3$$

Def^n $j^\mu = v^\mu \sqrt{-g}$ ⟵ densidad vectorial de peso 1

Def^n

$$\text{Flujo } v \equiv \text{Flujo } j = \int_\Sigma j^\mu \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial\theta^1}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\theta^2}\frac{\partial x^\rho}{\partial\theta^3} d^3\theta$$

- $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ carta sobre Σ. Orientacion de esta carta determina sentido de flujo
- flujo en sentido de t^μ tal que $t^\mu \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial\theta^1}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\theta^2}\frac{\partial x^\rho}{\partial\theta^3} > 0$

Con esta definición $\int_{\mathcal{M}} \partial_\mu j^\mu \, d^4x$ = Flujo de j saliente a traves $\partial\mathcal{M}$

- Hay una formulación muy elegante de todo esto en terminos de "formas diferenciales"
  - tensores antisimétricos con indices todos abajo
- $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ no es un tensor, es una densidad tensorial de peso -1.

  $\sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ sí es un tensor.
- Se puede formular flujos en terminos de tensores en lugar de densidades

  $J_{\nu\lambda\rho} = j^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \sigma^\mu \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ es un tensor $(0,3)$ y

  Flujo j = $\int_\Sigma J'_{123} \, d^3\theta$ donde J' es transformacion a carta θ^i de la restriccion de J al espacio tangente de Σ.

$\Rightarrow$ <u>Conclusión importante</u>: La densidad de corriente 4-momentum es en general

$$T^{\mu\nu}\sqrt{-g} \quad \text{donde } T \text{ es el tensor de estres-energía.}$$

<u>Conservacion local de momento</u>

- Dado que $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ en relatividad especial el principio de equivalencia sugiere que

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

en general.

$\Rightarrow$ 4-momento esta conservado localmente. Ya tenemos un aspecto de esto: particulas libres tienen aceleración cero en un referencial inercial local

$\Leftrightarrow \frac{dp^\mu}{dt} = 0$ en un referencial inercial local.

- Pero $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ no implica que el 4-momento de materia se conserva globalmente. Muy al contrario del caso de carga electrica

Conservación local de carga electrica $D_\mu j^\mu = 0$ con j^μ vector de 4-corriente eléctrica

$$0 = \partial_\mu j^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} j^\sigma$$

$$\Gamma^\mu_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\{\cancel{\partial_\mu g_{\sigma\rho}} + \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \cancel{\partial_\rho g_{\mu\sigma}}\} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\partial_\sigma g_{\mu\rho}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial_\sigma \det g}{\det g} = \frac{\partial_\sigma \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}$$

$$\det g = \frac{1}{4!}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} g_{\gamma\gamma'} g_{\delta\delta'}$$

$$\delta \det g = \frac{1}{3!}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\delta g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} g_{\gamma\gamma'} g_{\delta\delta'} = \delta g_{\alpha\alpha'} M^{\alpha\alpha'}$$

$\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} g_{\alpha\alpha'} g_{\beta\beta'} g_{\gamma\gamma'} g_{\delta\delta'} = K\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ porque es antisimétrico en $\alpha,\beta,\gamma,\delta$

$$\Rightarrow g_{\xi\alpha'} M^{\alpha\alpha'} = \frac{K}{3!}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\xi\beta\gamma\delta} = K\delta^\alpha_\xi$$

Pero $g_{\alpha\alpha'} M^{\alpha\alpha'} = 4\det g \Rightarrow 4K = K\delta^\alpha_\alpha = 4\det g \Rightarrow K = \det g$

$\Rightarrow g_{\xi\alpha'}\frac{1}{\det g} M^{\alpha\alpha'} = \delta^\alpha_\xi \Rightarrow M^{\alpha\alpha'} = g^{\alpha\alpha'}\det g$ = inverso de g por det g

$$\Rightarrow \delta \det g = \det g \; \delta g_{\alpha\alpha'} g^{\alpha\alpha'}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu(\sqrt{-g}\, j^\mu) = \sqrt{-g}\,(\partial_\mu j^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} j^\sigma) = \sqrt{-g}\, D_\mu j^\mu$$

- Ya vimos esto cuando hicimos integración por partes en acción de teoría de campos en coordenadas arbitrarias.

Conclusión de todo esto: $D_\mu j^\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu(\sqrt{-g}\, j^\mu) = 0$

Esto es una ley de conservación como en relatividad especial. Se puede integrar para mostrar que carga en una región espacial Σ en x^0 = constante

$$Q = \int_\Sigma j^0 \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3$$

solo cambia por carga escapando por el borde de Σ.

Pero esto no funciona para estrés - energía por el segundo índice

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}\,(\partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu})$$
$$= \sqrt{-g}\,(D_\mu T^{\mu\nu} - \Gamma^\nu_{\mu\sigma} T^{\mu\sigma})$$
$$= -\Gamma^\nu_{\mu\sigma}\sqrt{-g}\,T^{\mu\sigma}$$

- Eligiendo coordenadas inerciales en un punto podemos hacer $\partial_\mu(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}) = 0$ en este punto, pero no lo podemos hacer cero en todos puntos en espacio tiempo curvo.
- Así $P^\nu_m = \int_\Sigma T^{0\nu}\sqrt{-g}\,dx^1dx^2dx^3$ no es un 4-momento conservado
- Lo que si se puede hacer es agregar a $\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}$ un sevdo-tensor de estress - energía gravitatorio $t^{\mu\nu}$ — no una densidad tensorial - es cero en un punto en coordenadas inerciales locales tal que

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0$$

- Existen varias propuestas para $t^{\mu\nu}$ con distintos ventajas y permite definir un 4-momento conservado de materia y el campo gravitatorio para sistemas aislados.

Ecuación de campo de relatividad con materia

La mas obvia posibilidad para la ecuacion de campo es

$$R_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu}$$

con κ un constante, $T_{\mu\nu}$ el tensor de estrés - energía = la densidad de corriente de 4-momento de materia / $\sqrt{-g}$

- esto tiene lo generalización relativista de $\nabla\cdot\vec{g}$ por el lado izquierdo y lado derecho proporcional a la generalización relativista de la densidad de masa inercial ρ.
- en vacío reduce a $R_{\mu\nu} = 0$ que hemos visto produce predicciones correctas.

Pero hay un problema con esta ecuación:

Recuerdan la identidad de Bianchi contraida $D^\mu [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R] = 0$

Con esta ecuacion de campo tendriamos

$$D^\mu T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_\nu T = 0 \qquad \text{con} \quad T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \text{la traza de } T$$

- Si ademas $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ entonces $D_\nu T = 0 \Rightarrow T$ es constante en todo el espacio tiempo. Hay regiones del espacio tiempo con $T_{\mu\nu} = 0$, así $T = 0$.

- Para campos EM $T = 0$, pero para otros tipos de materia no. Para un polvo $T = -mN$ = - densidad de masa de reposo en el referencial de reposo. Para fluido perfecto $T = 3p - \rho$

Resolución del problema (Einstein Nov 1915)

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}} \qquad \text{Ecuación de Einstein}$$

Ahora id de Bianchi $\Rightarrow$ $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ - requiere conservación local de 4-momento!

Es como en la teoria de Maxwell $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -j^\beta$

$$\Rightarrow \partial_\beta j^\beta = -\partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{porque } F^{\alpha\beta} \text{ es antisimétrico en } \alpha,\beta$$

Solo carga conservada puede ser fuente de Maxwell. Solo 4-momento localmente conservado puede ser fuente de relatividad general.

- ¿Reduce a la correcta ecuación en vacío? ¡Si! $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$

Tomando traza de (*) da $R - \frac{1}{2} 4R = \kappa T \Rightarrow R = -\kappa T$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)$$

$$\Rightarrow \text{donde } T_{\mu\nu} = 0 \quad R_{\mu\nu} = 0.$$

¿ Cuanto vale κ ?

Esto es un parametro que hay que ajustar a los datos empiricos. El constante de Newton ya fue ajustado a los datos. Así podemos elegir K tal que las predicciones de RG coinciden con los de Newton en una situacion donde pensamos que la teoría de Newton es buena. Aqui vamos ajustar tal que da el mismo valor de $\nabla \cdot \vec{g}$ dentro de materia en reposo como en teoría Newtoniana. Realmente esto no es una situacion tan bien testeada. Luego vamos a recuperar el campo Newtoniano como funcion de la masa del fuente y ver que el mismo κ funciona allí.

- Entonces consideramos un referencial Lorentziano local en caida libre, S^*, con 4-velocidad $u = \partial_0$

$$\frac{d^2 \Delta s^i}{dt^2} = R^i{}_{00j} \Delta s^j$$

La aceleracion de gravedad en este referencial es $g^i = \frac{d^2 \Delta s^i}{dt^2}$

$$\nabla \cdot g = R^i{}_{00j} = - R^i{}_{0i0} = - R_{00}$$

Para materia en reposo con presión y otros estres moderados $T_{\mu\nu} = \rho \, \delta^0{}_\mu \delta^0{}_\nu$

con ρ_E = densidad de energía — como un polvo en reposo o un gas de partículas no relativistas.

Entonces según ecⁿ de Einstein

$$\nabla \cdot \vec{g} = - R_{00} = - K \left(T_{00} - \tfrac{1}{2} \eta_{00} \eta^{00} T_{00} \right) = - \frac{K}{2} \rho \qquad (c=1)$$

En la teoría Newtoniana

$$\nabla \cdot \vec{g} = - 4\pi G \rho$$

$$\Rightarrow 4\pi G = \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad K = 8\pi G$$

Ecⁿ de Einstein $\quad G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \, T_{\mu\nu}$