Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática II, módulo 2
Segundo semestre 2019

Examen. 05/08/2020.

Nombre:

Sea considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (y^2 - 5)e^{x^4+y^2}$.

1. Hallar sus derivadas parciales.
2. Hallar la derivada direccional de f en el punto $p = (1, 1)$ respecto al vector $v = (1, 2)$.
3. Hallar sus puntos estacionarios.
4. Hallar los extremos absolutos de f en el dominio $D = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 3\}$.
5. Calcular $\iint_E x^3 y\, f(x, y)\, dx\, dy$, siendo $E = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$.

Datos que pueden ser útiles para los cálculos: $\sqrt{5} \cong 2,24$ y $e \cong 2,7$.

Nota. Cada parte vale 20 puntos. Para aprobar se precisan 50.

Solución.

1. Las derivadas parciales son
$$f_x(x,y) = 4x^3(y^2-5)e^{x^4+y^2}, \qquad f_y(x,y) = 2(y^3-4y)e^{x^4+y^2}.$$

2. El gradiente de f en p es $\nabla_p f = -2e^2(8,3)$ y $\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. Luego
$$df_p(v) = -2e^2(8,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = -\frac{28}{\sqrt{5}}e^2.$$

3. Las soluciones de $f_x = 0$ son $x = 0$ e $y = \pm\sqrt{5}$. Las soluciones de $f_y = 0$ son $y = 0, \pm 2$.
Luego los puntos estacionarios son $(0,0)$, $(0,2)$ y $(0,-2)$.

4. Los puntos estacionarios que están en D son $(0,0)$ y $(0,2)$. Nos restringimos ahora al borde de D. En $x = 0$ es
$$\alpha(y) = f(0,y) = (y^2-5)e^{y^2} \quad\Rightarrow\quad \alpha'(y) = 2y(y^2-4)e^{y^2}; \quad \alpha'(y) = 0 \Rightarrow \quad y = 0, \pm 2 \Rightarrow \quad (0,0),\ (0,2).$$
En $x = 1$ es
$$\beta(y) = f(1,y) = (y^2-5)e^{y^2+1} \Rightarrow \quad \beta'(y) = 2y(y^2-)e^{y^2+1}; \quad \beta'(y) = 0 \Rightarrow \quad y = 0, \pm 2 \Rightarrow \quad (1,0),\ (1,2).$$
En $y = 0$ es
$$\gamma(x) = f(x,0) = -5e^{x^4} \quad\Rightarrow\quad \gamma'(x) = -20x^3e^{x^4}; \quad \gamma'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0 \quad\Rightarrow\quad (0,0).$$
En $y = 3$ es
$$\delta(x) = f(x,3) = 4e^{x^4+9} \quad\Rightarrow\quad \delta'(x) = 16x^3e^{x^4}; \quad \delta'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0 \quad\Rightarrow\quad (0,3).$$
Luego evaluando f en los puntos en los cuales puede haber un extremo obtenemos
$$f(0,0) = -5; \quad f(1,0) = -5e; \quad f(0,2) = -e^4; \quad f(0,3) = 4e^9; \quad f(1,2) = -e^{17}.$$
Entonces el máximo absoluto es $4e^9$ y el mínimo absoluto es $-e^{17}$.

5.
$$\begin{aligned}\iint_E x^3y\,f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^1 x^3y(y^2-5)e^{x^4+y^2}\,dx\,dy = \left(\int_0^1 x^3e^{x^4}\,dx\right)\left(\int_0^1 y(y^2-5)e^{y^2}\,dy\right)\\ &= \left(\frac{e^x}{4}\Big|_0^1\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^1(z-5)e^z\,dz\right) = \left(\frac{e-1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}(z-6)e^z\Big|_0^1\right)\\ &= \left(\frac{e-1}{8}\right)\left(\frac{6-5e}{2}\right) = \frac{(e-1)(6-5e)}{16}.\end{aligned}$$
Luego $\iint_E x^3y\,f(x,y)\,dx\,dy = \frac{(e-1)(6-5e)}{16}$.