Electromagnetismo (2021)

Práctico 8

Magnetostática

1er parte del curso

$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad . \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$

$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = 0$ → corrientes estacionarias $\underbrace{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J}$

si bien aún no hablamos hablado de esto... ya estaba presente

$\frac{\partial}{\partial t}(\;) = 0$

Solo nos enfocamos en la contraparte eléctrica

" $\vec{J} = g\vec{E}$ "

Recomendación para poner en perspectiva

$\nabla \cdot \vec{E} = \qquad \nabla \cdot \vec{B} =$

$\nabla \times E = \qquad \nabla \times \vec{B} =$

ver Apéndice B del Griffiths (T. de Helmholtz)

Ahora estamos acá

$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\nabla \times \vec{E} = 0$

$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$

Nos vamos a centrar acá

$(\vec{F}_{Lor} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}))$

Fuerza magnética $\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \times B$

$\int_{\mathcal{C}} I\, d\vec{l}' \times \vec{B} \qquad \int_S \vec{K} \times \vec{B}\, da \qquad \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \times \vec{B}\, d^3r$

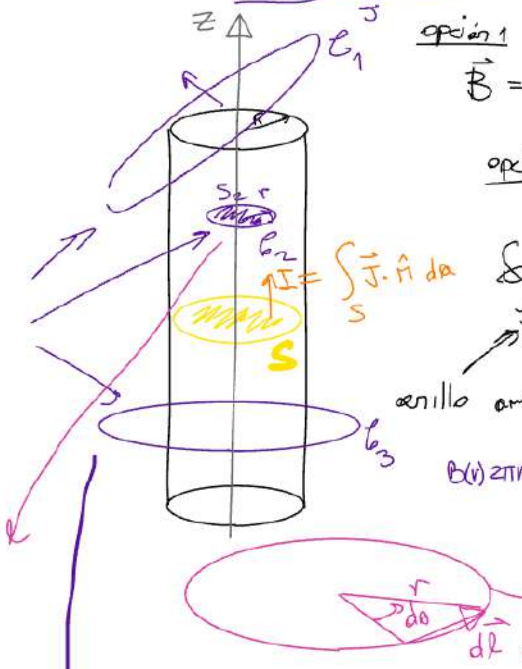
$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mu \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \longrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{I\, d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

El hecho de que $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \,/\, \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

potencial vector magnético

Ley de Biot Savart y Fuerza de Lorentz

1. Hallar el campo B a una distancia r del centro de un alambre largo que conduce una corriente I que se distribuye uniformemente sobre su sección en la dirección de su eje.



J

opción 1

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3\vec{r}\,'$$

TL j DR j

opción 2

Ampere

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc.}$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, da$$

anillo amperiano

todo válido,

No todo útil

$r'dr'd\theta'$

$\hat{k}$ $\vec{J} = J\hat{k}$

$$B(r)2\pi r = B(r)\int_0^{2\pi}\hat{e}_\theta\cdot r\,d\theta\,\hat{e}_\theta = \oint_{\mathcal{C}_2}\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0\int_{S_2}\vec{J}\cdot\hat{n}\,da = \mu_0 J\int_0^{r}\int_0^{2\pi} r'dr'd\theta' = \mu_0 J\pi r^2$$

$\vec{B} = B(r)\,\hat{e}_\theta$

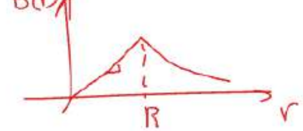
$d\vec{\ell} = r\,d\theta\,\hat{e}_\theta$

orientar la curva de forma comp. con la sup.

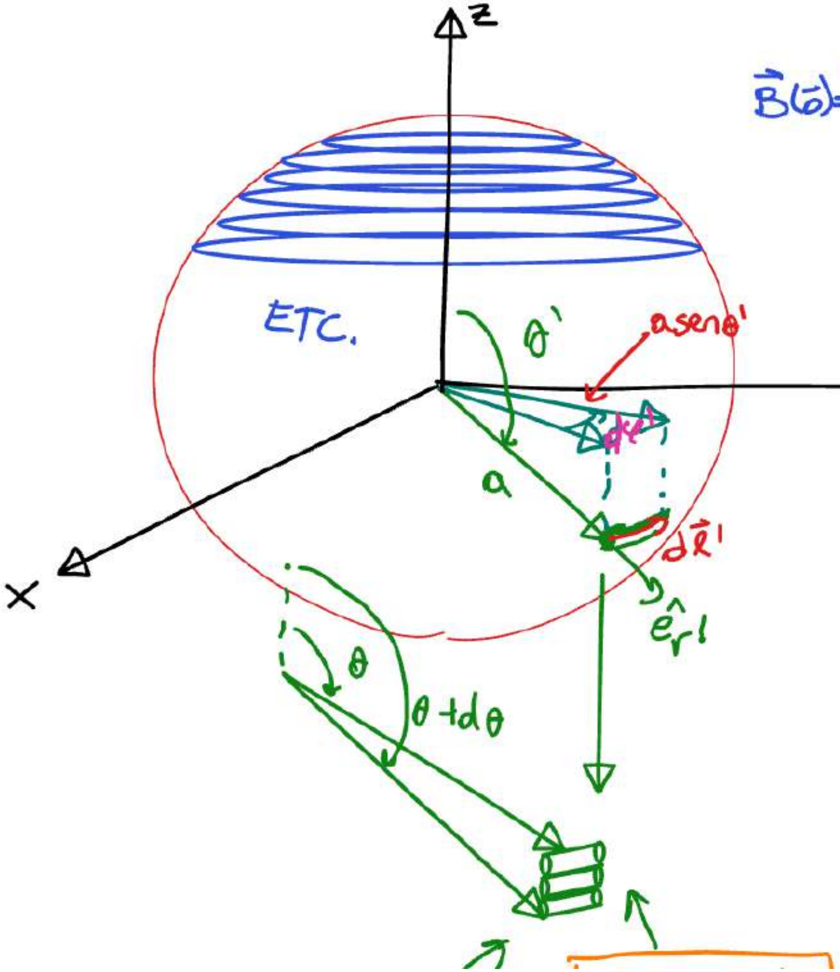
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J r}{2}\,\hat{e}_\theta \quad \text{si } r<R}$$

$$B(r)2\pi r = B(r)\int_0^{2\pi}\hat{e}_\theta\cdot r\,d\theta\,\hat{e}_\theta = \oint_{\mathcal{C}_3}\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 J\pi R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J R^2}{2r}\,\hat{e}_\theta \quad \text{si } r>R}$$



3. Un gran número de vueltas de alambre muy fino se enrollan muy próximas entre sí, en una sola capa, sobre una esfera de madera de radio a. Los planos de las vueltas son todos paralelos entre sí y la cubren totalmente. Si circula una corriente I_0 por el alambre, calcular el valor del campo magnético en el centro de la esfera.



$$\vec B(\vec 0) = \int d\vec B(\vec 0) =$$

$$d\vec B = \frac{I\, d\vec \ell' \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}\,\frac{\mu_0}{4\pi} = -\frac{a\,\mu_0}{4\pi a^3}\, I\, a\,\text{sen}\,\theta'\, d\varphi\, \underbrace{\hat e_\varphi \times \hat e_{r'}}_{\hat e_{\theta'}}$$

$$d\vec \ell' = a\,\text{sen}\,\theta'\, \hat e_\varphi\, d\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec r = \vec 0 \\ \vec r' = a\,\hat e_{r'} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec r - \vec r' = -a\,\hat e_{r'} \\ |\vec r - \vec r'| = a \end{array}$$

Modelemos

n = "número de cables por unidad de z"

$\tilde n$ = "numero de cables por unidad de θ"

n = "número de cables por unidad de z"

$\tilde{n}$ = "numero de cables por unidad de θ"

¿ n es cte ó $\tilde{n}$ es cte?

a mi criterio es más razonable $\tilde{n} = cte$

$I\, a\, d\theta\, \text{sen}\theta$

$I = n I_0 dz$

$\boxed{I = \tilde{n} I_0 a\, d\theta'}$

$\Rightarrow I = n I_0 a\, \text{sen}\theta'\, d\theta'$

usemos $I = \tilde{n} I_0 a\, d\theta$

$$\hat{e}_{\theta'} = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = r\,\text{sen}\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \int d\vec{B}(\vec{0}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{-a\mu_0}{4\pi a^3}\, \tilde{n} I_0 a\, d\theta'\, a\,\text{sen}\theta'\, d\varphi'\, \hat{e}_{\theta'}$$

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu_0 \tilde{n} I_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\theta' \left[\cancel{\cos\theta'\cos\varphi'}^{\,0}\,\hat{i} + \cancel{\cos\theta'\,\text{sen}\varphi'}^{\,0}\,\hat{j} - \text{sen}\theta'\,\hat{k}\right]$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\, d\varphi' = \int_0^{2\pi}\text{sen}\varphi'\, d\varphi' = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 \tilde{n} I_0}{4\pi}\hat{k}\underbrace{\int_0^{\pi}\text{sen}^2\theta'\, d\theta'}_{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{2\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 \tilde{n} I_0 \pi \hat{k}}{4}}$$

8. Calcular el potencial vector magnético $\vec{A}$ de:

a) Un solenoide infinito con n vueltas por unidad de longitud, radio a y corriente I.

b) Una corriente que circula en un cable recto de longitud L.

c) Un alambre recto infinito rodeado por una capa conductora cilíndrica delgada de radio a con su eje en el alambre, que conducen una corriente I en sentidos opuestos.

¿Como calcular $\vec{A}$?

$\vec{A}$ es tal que $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$

$(\nabla\cdot\vec{B}=0)$ $\to$ $\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\lambda$ ← Una elección de $\vec{A}$ (pot. vector) y ϕ (pot escalar) es una fijación de gauge

tengo libertad $\to$ $\nabla\times\vec{A}'=\nabla\times\vec{A}$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J} \Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu_0\vec{J}$$

$$-\nabla^2\vec{A}+\nabla(\nabla\cdot\vec{A})$$

$$-\nabla^2\vec{A}'+\nabla(\cancel{\nabla\cdot\vec{A}'})$$

0 porque puedo construirlo

$$\nabla^2\vec{A}'=-\mu_0\vec{J}$$

$\hookrightarrow \nabla^2 A'_x=-\mu_0 J_x$

$\hookrightarrow \nabla^2 A'_y=-\mu_0 J_y$

$\hookrightarrow \nabla^2 A'_z=-\mu_0 J_z$

Una forma de hallar $\vec{A}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mu_0\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$$

en analogía

$$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon_0 \to \varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho(\vec{r}')/\varepsilon_0}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$$

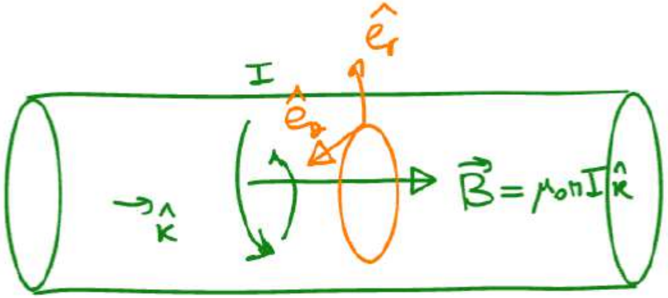
$$\int_S\nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{l}=\oint_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_S(\nabla\times\vec{B})\cdot\hat{n}=\int_S\mu_0\vec{J}\cdot\hat{n}=\mu_0 I_{enc}$$

$$\boxed{\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, da = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\, da = \oint_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{l}}$$

$\Leftarrow$ si tengo ciertas simetrías y conozco o puedo calcular $\Phi_B \Rightarrow$ puedo calcular $\vec{A}$

parte a) y c)

a)



$\vec{A}$ sigue a la corriente

$\Rightarrow$ no tiene comp. según $\hat{k}$

además $\vec{A}$ solo tiene comp. según $\hat{e}_\theta$

$\vec{A}(\vec{r}) = A(r)\hat{e}_\theta$

$$\Phi_B = \mu_0 n I \pi r^2 = \oint A(r)\hat{e}_\theta \cdot r\, d\theta\, \hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow A(r) = \underbrace{\mu_0 n I}_{|\vec{B}|} \frac{r}{2} \quad \text{si } r<R$$

$$\Rightarrow \vec{A}_{sol}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 n I r}{2}\hat{e}_\theta & \text{si } r<R \\ \dfrac{\mu_0 I R^2}{2r}\hat{e}_\theta & \text{si } r>R \end{cases}$$

¿$\nabla\times\vec{A}_{sol}$?

$A_{sol} \neq 0$ si $r>R$

$B_{sol} = 0$ si $r>R$