Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Anillos y Módulos
Segundo semestre de 2021

Repartido 8: Grupos de torsión y teorema de estructura

En este práctico D designa un **dominio de integridad**.

1. Si A es un anillo conmutativo y M un A-módulo libre, demostrar que $\mu(M) = \mathrm{rg}(M)$. Si además $n := \mathrm{rg}(M)$ es finito, probar que todo conjunto generador de M tiene cardinal $\geqslant n$.

2. Si M es un D-módulo finitamente generado y $U := \{u_1, \dots, u_\ell\}$ es un conjunto linealmente independiente, demostrar que $l \leqslant \mu(M)$.[1] Sugerencia: hacerlo en las siguientes etapas,

   a) Sea $\{m_1, \dots, m_r\}$ un generador de M, y considerar $u_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} m_j$, $i = 1, \dots, \ell$. Probar que el sistema de ecuaciones
   $$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i a_{ij} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant r$$
   no tiene soluciones no triviales.

   b) Probar que si fuera $\ell > r$ entonces existiría una solución no trivial del sistema de ecuaciones de arriba. Es útil obtener prmero la solución en K^ℓ, donde $K = \mathrm{Frac}(D)$.

3. *a*) Sea M un D-módulo, $N \subset M$ un submódulo. Probar que $\mathrm{Tor}(N) = \mathrm{Tor}(M) \cap N$.

   b) Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de D-módulos. Probar que $\mathrm{Tor}(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Tor}(M_i)$. En particular, la suma directa de módulos de torsión es de torsión.

   c) Probar que lo anterior es falso para el producto directo.

4. Probar que son equivalentes:

   a) D es un cuerpo.

   b) Todo D-módulo es libre de torsión.

   c) Todo D-módulo cíclico es libre de torsión.

5. Sea G un grupo abeliano divisible.

   a) Probar que el subgrupo $\mathrm{Tor}(G)$ es divisible.

   b) Probar que $G/\mathrm{Tor}\, G$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, con la acción $\frac{p}{q} \cdot x = y$, donde $y \in G/\mathrm{Tor}(G)$ es tal que $px = qy$.[2]

6. Determinar el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 360.

7. Dar la descomposición primeria y en factores invariantes de los siguientes grupos abelianos, y determiniar sus factores invaraintes.

   a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{35}$.

---

[1] Esto, junto con el ejercicio 1, nos dice que (en un dominio) todo conjunto linealmente independiente tiene $\leqslant$ elementos que una base. La prueba que sugerimos descansa en el cuerpo de fracciones, por lo tanto no se puede generalizar a un anillo conmutativo, pero también vale el resultado en ese contexto.

[2] En particular, $G/\mathrm{Tor}(G) \simeq \oplus_{i\in I}\mathbb{Q}$. Se puede probar que por ser $\mathrm{Tor}(G)$ divisible, se tiene que $G \simeq \mathrm{Tor}(G) \oplus G/\mathrm{Tor}(G)$, es decir, se descompone en una parte de torsiíon y una parte libre de torsiíon. Hemos determinado la parte libre de torsión; se puede probar que la parte de torsión es suma directa de *p-grupos de Prüfer*, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Este es el contenido del *teorema de estructura para grupos abelianos divisibles*.

b) $\mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{1000}$.

8. Determinar (a menos de isomorfismo) todos los grupos avelianos de orden n para $n \leqslant 20$.

9. Probar que un grupo abeliano finito es cíclico si y solamente si sus factores invariantes son primos entre sí.

10. Sean M, N, P módulos finitamente generados sobre un dminio de ideales principales D. Probar:

    a) $M \oplus M \simeq N \oplus N \Rightarrow M \simeq N$

    b) $M \oplus P \simeq N \oplus P \Rightarrow M \simeq N$

11. a) Sea M un submódulo de D^n generado por $\{v_1, \dots, v_k\}$. Probar que si A es la matriz cuya i-ésima columna es v_i y P es una matriz invertible, entonces las columnas de AP también generan M.

    b) En los siguientes casos, hallar una base del D-submódulo N del módulo D^3:

    1) $D = \mathbb{Z}$, $N = \langle (2, 4, -10), (4, -4, 8) \rangle$.
    2) $D = \mathbb{Z}$, $N = \langle (1, 0, -1), (2, -3, 1), (0, 3, 1), (3, 1, 5) \rangle$.
    3) $D = \mathbb{Q}[x]$, $N = \langle (2x - 1, x, x^2 + 3), (x, x, x^2), (x + 1, 2x, 2x^2 - 3) \rangle$.
    4) $D = \mathbb{Z}$, $N = \langle (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \colon x + 2y + 3z = 0, x + 4y + 9z = 0 \rangle$.

12. Hallar la forma de Jordan (si es posible) en los siguientes casos.

    a) $T \colon \mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}^3$, $T(x, y, z) = (-x - y - z, -2x - z, 6x + 3y + 4z)$, for $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

    b) $T \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, $T(x, y, z) = (-x - 2y + z, -x - 3y + 2z, -x - 5y + 2z)$.

    c) $T \colon \mathbb{k}^4 \to \mathbb{k}^4$, $T(x, y, z, t) = (-10y - 4z + 12t, x - 4y + 4t, 7y + 3z - 7t, x - y + z + t)$, for $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

    d) $T \colon \mathbb{k}^4 \to \mathbb{k}^4$, que verifica $(T^2 + 2T + 2I) \circ (T^2 - 2I) = 0$, $T^2 + 2T + 2I \neq 0$, $T^2 \neq 2I$, for $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

    En los tres primeros casos hallar una base del espacio en la cual la matriz asocada a T toma dicha forma.