RELATIVIDAD GENERAL 2021 Clase 26 Michael Reisenberger

Relatividad general linealizado Hartle Cap 16 y Cap. 21.5

· Consideramos campos gravitatorios débiles — espacio tiempo casi plano

→ supongamos que existe una carta global x^α tal que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{con} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

→ Ecⁿ de Einstein calculado hasta 1ᵉʳ orden = ecⁿ de campo lineal en h ← RG linealizado

(Esto significa que supongamos $g_{\alpha\beta}(\lambda) = \eta_{\alpha\beta} + \lambda h_{\alpha\beta}$, con λ un parametro independiente de posicion en espacio tiempo, y calculamos $G_{\alpha\beta}$ hasta 1ᵉʳ orden en λ.)

· Interesante porque encontramos muchos campos débiles en la Naturaleza

- veremos que recuperamos la teoría de Newton si supongamos además que la matéria se mueve lentamente en algún referencial común.

- tambien veremos que RG admite ondas del campo gravitacional, y

  - que estos viajan con la velocidad de la luz.
  - que hay dos polarizaciones linealmente independientes, como en EM.
  - veremos como se miden ondas gravitacionales.

· Desarollamos entonces a la ecuación de Einstein hasta primer orden en h.

Orden 0: Si $h = 0$ $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ – estamos en espacio tiempo plano (con coordenadas Lorentzianas.)

- Esto es una solución a la ecuación de Einstein con tensor de estres-energía $T_{\alpha\beta} = 0$

- Nota que tambien se hace desarollos perturbativas entorno a otras soluciones, especialmente soluciones cosmologicas que generalmente tienen $T \neq 0$, Pero aqui no lo vamos hacer.

Orden 1: Admitimos una pequeña perturbacion $h_{\alpha\beta}$ a la métrica y posiblemente un pequeño $T_{\alpha\beta}$ no cero.

Hasta primer orden en h

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\epsilon}\{\partial_\beta h_{\gamma\epsilon} + \partial_\gamma h_{\beta\epsilon} - \partial_\epsilon h_{\beta\gamma}\}$$

- nota que incluir el término de 1^{er} orden en h en $g^{\alpha\epsilon}$ corregería esta expresión con un término de 2^{nda} orden en h
- Por eso los índices de expresiones de $O(h)$ se suben y bajan con $\eta^{\alpha\beta}$ y $\eta_{\alpha\beta}$ respectivamente.
- Nota tambien que hasta $O(h)$ $\quad g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\epsilon}\eta^{\beta\theta}h_{\epsilon\theta}$

Dem: Sea M una familia unipesamétral de matrices invertibles

$$MM^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \delta M M^{-1} + M\,\delta M^{-1} = 0$$

δ = derivada de M según parametro

$$\Rightarrow \delta M^{-1} = -M^{-1}\delta M\, M^{-1}$$

Aquí usamos $M = g$ y variamos entorno $g = \eta$ con $\delta M = h$

Otra dem: $(\eta_{\alpha\epsilon} + h_{\alpha\epsilon})(\eta^{\epsilon\beta} - h^{\epsilon\beta}) = \delta_\alpha^\beta + \cancel{h_\alpha{}^\beta} - \cancel{h_\alpha{}^\beta} + O(h^2)$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + O(\Gamma^2)$$ ← terminos cuadráticos en Γ son $O(h^2)$

$$R_{\alpha\beta} = R^\epsilon{}_{\alpha\epsilon\beta} = \frac{1}{2}\partial_\epsilon\eta^{\epsilon\theta}(\overset{1}{\partial_\alpha h_{\beta\theta}} + \overset{2}{\partial_\beta h_{\alpha\theta}} - \overset{3}{\partial_\theta h_{\alpha\beta}})$$

$$-\frac{1}{2}\partial_\beta\eta^{\epsilon\theta}(\overset{4}{\partial_\alpha h_{\epsilon\theta}} + \overset{5}{\partial_\epsilon h_{\alpha\theta}} - \overset{6}{\partial_\theta h_{\alpha\epsilon}})$$ — 5 y 6 cancelan

$$= -\frac{1}{2}\eta^{\epsilon\theta}\overset{3}{\partial_\epsilon\partial_\theta h_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2}\overset{1}{\partial_\alpha\partial_\epsilon h^\epsilon{}_\beta} + \frac{1}{2}\overset{2}{\partial_\beta\partial_\epsilon h^\epsilon{}_\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha\partial_\beta h$$

con $\quad h^\epsilon{}_\alpha = \eta^{\epsilon\theta}h_{\theta\alpha} \quad h = \eta^{\epsilon\theta}h_{\epsilon\theta}$ "traza" de h

$$= -\frac{1}{2}\Box h_{\alpha\beta} + \partial_{(\alpha}V_{\beta)}$$

con $\Box$ = d'Alembertiano especial relativista, y $\quad V_\alpha = \partial_\epsilon h^\epsilon{}_\alpha - \frac{1}{2}\partial_\alpha h$

$$= \eta^{\epsilon\theta}\partial_\epsilon(h_{\theta\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\theta\alpha}h)$$

$$= \partial_\epsilon \bar{h}^\epsilon{}_\alpha$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$$

"h con traza revertida": $\quad \bar{h} \equiv \eta^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} = h - 2h = -h$

hasta $O(h)$

$$R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\Box h + \partial_\epsilon V^\epsilon$$

$$\Rightarrow \quad G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} R = -\tfrac{1}{2}\Box\left(h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h\right) + \partial_{(\alpha} V_{\beta)} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\epsilon V^\epsilon$$

$$= -\tfrac{1}{2}\Box \bar{h}_{\alpha\beta} + \partial_{(\alpha} V_{\beta)} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\epsilon V^\epsilon$$

Entonces la ecuacion de Einstein, hasta $O(h)$ es

$$\Box \bar{h}_{\alpha\beta} - 2\partial_{(\alpha} V_{\beta)} + \eta_{\alpha\beta}\partial_\epsilon V^\epsilon = -16\pi G\, T_{\alpha\beta}$$

- Sabremos resolver esta ecuación si no fuese por los terminos con V.
- Esta situación es parecida a la con la ecⁿ de Maxwell

$$J_\beta = -\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = -\Box A_\beta + \partial_\beta(\partial\cdot A)$$

Si no fuera por la derivada de $\partial\cdot A \equiv \partial^\epsilon A_\epsilon$ sería una ecuación de onda con fuente que se sabe resolver. De hecho no es solo que no se sabe resolver, no se puede resolver porque la solución es indeterminada: $A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha\Lambda$ para cualquier función Λ mapea soluciones a soluciones.

- Una manera de proceder es usar precisamente esta libertad para poner $\partial\cdot A = 0$ "El calibre de Lorenz". Esto no fija Λ completamente. Todavia se puede cambiar $A_\alpha \to A_\alpha + \partial_\alpha\Lambda$ con $\Box\Lambda = 0$. Pero si se pide ademas que $A_\alpha(z) \to 0$ con $z^\beta \to \infty$ entonces no hay transformacion de calibre y la solución es unica, porque $\Box\partial_\alpha\Lambda = 0$ y $\partial_\alpha\Lambda \to 0$ en $\infty \Rightarrow \partial_\alpha\Lambda = 0$. Efectivamente las solⁿs de $\Box A_\beta = -J_\beta$ son únicas si se pide $A_\beta \to 0$ en ∞.

- Se puede hacer exactamente lo mismo en RG linealizado. La condicion

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

permite todavia ciertos cambios de coordenadas. Podemos usar estos para poner

$$0 = V_\alpha = \partial^\epsilon h_{\epsilon\alpha} \qquad \text{— calibre "de Lorenz", de "de Donder", "armónico", \ldots}$$

"de Lorentz"

La libertad en las coordenadas es de hacer una

1. transformación de Lorentz $\quad z^\alpha \rightarrow z'^\epsilon = \Lambda^\epsilon{}_\alpha z^\alpha$

2. una translación rígida $\quad z^\alpha \rightarrow z'^\alpha = z^\alpha + b^\alpha \quad b^\alpha$ constantes

3. un cambio de coordenadas $\quad z^\alpha \rightarrow z'^\alpha = z^\alpha + \xi^\alpha(z)$

– para que este último tipo de cambio de coordenadas sea admisible $h'_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}$, el h en las nuevas coordenadas debe seguir siendo pequeño.

Evaluemos h'

Escribimos ξ^α como funcion de z' $\Rightarrow z^\alpha = z'^\alpha - \xi^\alpha(z')$

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} = \frac{\partial z^\gamma}{\partial z'^\alpha}\frac{\partial z^\delta}{\partial z'^\beta}\, g_{\gamma\delta}(z(z'))$$

$$= (\delta^\gamma_\alpha - \partial'_\alpha \xi^\gamma)(\delta^\delta_\beta - \partial'_\beta \xi^\delta)\big(\eta_{\gamma\delta} + h_{\gamma\delta}(z' - \xi)\big)$$

$$= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(z') - \xi^\epsilon \partial'_\epsilon h_{\alpha\beta} - \partial'_\alpha \xi_\beta - \partial'_\beta \xi_\alpha$$

hasta primer orden. $\qquad$ z' es el argumento de h aquí

Aquí supusimos que $\partial'_\alpha \xi_\beta$ es de orden h o mas pequeño, así terminos cuadráticos en $\partial'\xi$ son de 2nda orden y por tanto no los incluimos.

Si ademas supongamos que ξ mismo es pequeño entonces $\xi^\epsilon \partial'_\epsilon h_{\alpha\beta}$ tambien es despreciable* – de orden mas alto que primero y

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial'_\alpha \xi_\beta - \partial'_\beta \xi_\alpha = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha$$

derivada en z' y en z son iguales hasta orden 0.

Estos son las transformaciones que vamos admitir.

– La transformación de h es bastante parecide a la transformacion de A_α bajo cambios de calibre en EM.

* De hecho si ∂h decae como $\frac{1}{r^2}$ en ∞ ξ puede ser grande en ∞ y $\xi \partial_\epsilon h$ todavia despreciable.

$$h' = h - 2\partial^\epsilon \xi_\epsilon$$

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = h'_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h' = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta}\partial^\epsilon \xi_\epsilon$$

$$V'_\alpha = \partial^\epsilon \bar{h}'_{\epsilon\alpha} = V_\alpha - \Box \xi_\alpha$$

- Dado un V_α inicial (que decae suficientemente rapido en ∞) podemos resolver $\Box \xi = V_\alpha$ y obtener un ξ^α admisible tal que $V'_\alpha = 0$.

Ahora en adelante usemos este calibre para RG linealizado

$$\Box \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi G\, T_{\alpha\beta}$$

$$\partial^\epsilon \bar{h}_{\epsilon\alpha} = 0$$

Solución

tiempo retardado

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^0, \vec{x}) = 4G \int \frac{T_{\alpha\beta}(x^0 - |\vec{x}-\vec{y}|, y)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d^3y \quad + \text{ ondas sin fuente}$$

Límite Newtoniano

Supongamos que

1. Las masas fuentes del campo gravitatorio son lo suficientemente cercanas y mueven suficientemente lento que se puede despreciar el retardo en la formula para la solución

2. $T_{00} \gg$ otros componentes de T. Para un cuerpo en vacío hecho de campos y fluidos estacionarios en rel. especial

$$0 = \int x^i \partial_j T^{j\beta} d^3x = -\int \partial_j x^i\, T^{j\beta} d^3x = \int T^{i\beta} d^3x.$$

Un cuerpo hecho de particulas lentas con poca fuerza de interaccion $T_{00} \gg T_{ia}$

3. No hay ondas gravitacionales entrando el sistema

$$\Rightarrow \bar{h}_{i\beta} = 0 \qquad \bar{h}_{00} = -4G \int \frac{T_{00}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} d^3y = -4\Phi \quad \text{— potencial gravitatorio Newtoniano}$$

$$h = -\bar{h} = -\eta^{00}\bar{h}_{00} = -4\phi$$

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h = \bar{h}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h} = \bar{h}_{\alpha\beta} - 2\phi\,\eta_{\alpha\beta}$$

$$h_{00} = -2\phi \qquad h_{0i} = 0$$

$$h_{ij} = -2\phi\,\delta_{ij}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -(1+2\phi) & & & \\ & 1-2\phi & & \\ & & 1-2\phi & \\ & & & 1-2\phi \end{bmatrix}$$

Una particle libre de fuerzas no gravitatorias mueve según la ecuacion geodesica
Si esta en reposo en el momento bajo consideracion

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{00} = -\tfrac{1}{2}\eta^{ii}\{\partial_0 h_{0i} + \partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\partial_i h_{00}$$

$$= -\partial_i \phi$$

$\Rightarrow$ RG reproduce la teoría Newtoniana completamente en el regimen de campos debiles y marcos moviendo lentamente en el cual ha sido comprobado.

Otra perspectiva sobre calibre armónico – valido en toda geometría no solo casi plana

- Coordenadas son funciones escalares sobre espacio tiempo.
- Coordenadas armonicas satisfacen

covector – μ no es indice tensorial

$$0 = \Box x^\mu \equiv g^{\sigma\rho} D_\sigma D_\rho x^\mu = g^{\sigma\rho} D_\sigma [dx^\mu]_\rho$$

$$= g^{\sigma\rho}\left(\partial_\sigma \delta^\mu_\rho - \Gamma^\lambda_{\sigma\rho}\, \delta^\mu_\lambda\right)$$

$$= -\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\, g^{\sigma\rho}$$

- Esto se puede expresar de otra manera

$$\partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) = \partial_\mu g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \partial_\mu \sqrt{-g}$$

$$= -\Gamma^\nu_{\mu\sigma}\, g^{\mu\sigma} \sqrt{-g} - \cancel{\Gamma^\mu_{\mu\sigma}\, g^{\sigma\nu}} \sqrt{-g} + \cancel{g^{\mu\nu}\, \Gamma^\sigma_{\sigma\mu}} \sqrt{-g}$$

$$= -\Gamma^\nu_{\mu\sigma}\, g^{\mu\sigma} \sqrt{-g}$$

$$= 0 \quad \text{en coordenadas harmonicas}$$

- Esta condicion es reminscente de la condicion de calibre Lorenz $\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$, y de hecho reduce a esta condición cuando la métrica es casi Minkowski en coordenadas armónicas: En este caso hasta 1^er orden en $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu}\sqrt{-g} = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(1 + \tfrac{1}{2} h) \quad \leftarrow \quad -\det(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = -(\det \eta)(1 + \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho}) = 1 + h$$

$$= \eta^{\mu\nu} - \left(h^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h\right)$$

$$= \eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\mu\nu}$$

pq $\dfrac{\delta \det M}{\det M} = \mathrm{tr}\, M^{-1} \delta M$ para cualquier matriz invertible

Así $\partial_\mu (g^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = -\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}$

Ondas gravitacionales

- Onda plana y monocromatica

$$h_{\alpha\beta}(z) = A_{\alpha\beta}\, e^{i k\cdot z}$$

$A_{\alpha\beta}$ = constants

$k^\alpha = [\omega, \vec{k}]$ = 4-vector de onda

$$\Rightarrow h = \eta^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\, e^{ik\cdot z}$$

$$\Rightarrow \bar{h}_{\alpha\beta} = \left[A_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\gamma\delta}A_{\gamma\delta})\right] e^{ik\cdot z} \equiv \bar{A}_{\alpha\beta}\, e^{ik\cdot z}$$

Calibre de Lorentz $\quad 0 = \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta} = i k^\alpha \bar{A}_{\alpha\beta}\, e^{ik\cdot z} \quad \Leftrightarrow \quad k^\alpha \bar{A}_{\alpha\beta} = 0$

Ec^n de Einstein en vacío en calibre de Lorentz

$$0 = \Box \bar{h}_{\alpha\beta} = -k^2 \bar{A}_{\alpha\beta}\, e^{ik\cdot z} \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = 0$$

Es decir k es un vector nulo, o luminal; $0 = \omega^2 - \|\vec{k}\|^2 \Rightarrow \omega = \|\vec{k}\|$

(vamos a suponer $\omega > 0$)

Esto implica que la onda propaga con velocidad 1, la velocidad de la luz:

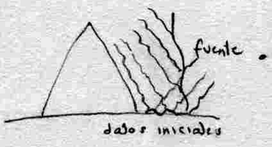
Orientemos los ejes de las coordenadas espaciales z^i tal que $k^1 = k^2 = 0$, $k^3 = \omega$

$$k^\alpha = [\omega, 0, 0, \omega]$$

$$e^{ik\cdot z} = e^{-i\omega(t-z)}$$ así las crestas $e^{-i\omega(t-z)} = 1$

así las crestas $e^{-i\omega(t-z)} = 1$ se encuentran en $t - z = \frac{2n\pi}{\omega} \Rightarrow$ En una cresta $\frac{dz}{dt} = 1 \Rightarrow$ velocidad de frentes de onda es 1, según el eje z.

- El hecho que una onda gravitacional propaga con la velocidad de la luz es un aspecto de un resultado mas general de la teoria exacta, que dice que la metrica en un punto no es afectado por cambios de las fuentes o de los datos iniciales para la metrica fuera de su cono luz pasado



- Esto solo implica que señales de luz no van mas rapido que la luz. En general señales pueden viajar mas lentamente que la luz. Se puede pensar de esto como resultado de dispersion de ondas grav. por el campo grav.

Calibre transverse sin traza (transverse traceless gauge)

Adoptar el calibre de Lorenz no fija a las coordenadas completamente.

Todavia hay alguna libertad que podemos usar para imponer a las condiciones

$$\bar{h}_{i0} = \bar{h}_{0i} = 0 \qquad \text{transversa}$$

$$\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} \equiv \bar{h} = 0 \qquad \text{traza cero}$$

Recuerda que bajo $x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \to \bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta} \partial^\epsilon \xi_\epsilon$$

$$\Rightarrow \quad V_\beta \to V'_\beta = V_\beta + \Box \xi_\beta \qquad V_\beta = \partial^\alpha \bar{h}_{\alpha\beta}$$

Entonces un cambio pequeño de coordenados $x^\alpha \to x^\alpha + \xi^\alpha$ preserva el calibre de Lorenz ssi

$$\Box \xi_\beta = 0$$

Si tomamos ξ_α como una onda plana monocromatica con el mismo k como nuestra onda en $h_{\alpha\beta}$,

$$\xi_\alpha(x) = b_\alpha e^{ik\cdot x}, \qquad (b_\alpha \text{ constantes})$$

entonces se cumple esta condicion ya que $k^2 = 0$ y entonces $\Box \xi_\alpha = -k^2 \xi_\alpha = 0$

Con este ξ_α

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = [\bar{A}_{\alpha\beta} - i(k_\alpha b_\beta + k_\beta b_\alpha - \eta_{\alpha\beta}\, k\cdot b)]\, e^{ik\cdot x}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{h}' = [\bar{A} + 2i\, k\cdot b]\, e^{ik\cdot x} \qquad \bar{A} = \bar{A}_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}$$

Poniendo $\quad 2i\omega\,[b_0 + b_3] = 2i\,k\cdot b = -\bar{A}$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{h}' = 0 \quad \text{— traza cero}$$

Habiendo adoptado esta condición sobre $b_0 + b_3$ tenemos todavia libertad

$$\bar{h}'_{0i} = [\bar{A}_{0i} - i(k_0 b_i + k_i b_0)]\, e^{ik\cdot x}$$

$$= [\bar{A}_{0i} + i\omega(b_i - \delta^3_i b_0)]\, e^{ik\cdot x}$$

$$\bar{h}'_{03} = [\bar{A}_{03} + i\omega(b_3 - b_0)]\, e^{ik\cdot x}$$

$$\bar{h}'_{01} = [\bar{A}_{01} + i\omega b_1]\, e^{ik\cdot x} \qquad \bar{h}'_{02} = [\bar{A}_{02} + i\omega b_2]\, e^{ik\cdot x}$$

b_1, b_2, y $b_3 - b_0$ pueden elegirse tal que los $\bar{h}'_{0i} = 0$

Con estas condiciones adicionales el calibre de Lorenz, $\partial^\alpha \bar{h}'_{\alpha\beta} = 0$ es equivalente a

$$0 = k^\alpha \bar{A}_{\alpha 0} = k^0 \bar{A}_{00} = \omega \bar{A}_{00} \iff \bar{A}_{00} = 0$$

$$0 = k^\alpha \bar{A}_{\alpha i} = k^j \bar{A}_{ji} = \omega \bar{A}_{3i} \iff \bar{A}_{3i} = 0$$

Entonces solo los 4 componentes $\bar{A}_{11}$, $\bar{A}_{12}$, $\bar{A}_{21}$, $\bar{A}_{22}$ pueden ser no cero.

- Por simetría $\bar{A}_{12} = \bar{A}_{21} \equiv b$. Por traza cero $\bar{A}_{11} = -\bar{A}_{22} \equiv a$

- En estas coordenadas

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} e^{ik\cdot z}$$

- Hemos desarrollado esta fijación de coordenadas para una onda plana monocromática. Pero cualquier metrica casi plana se puede escribir como una suma (integral de Fourier) de ondas planas monocromáticas. Y sumando los correspondientes $\xi_\alpha = b_\alpha e^{ik\cdot z}$ se obtiene la transformación de coordenadas tal que

$$\bar{h}'_{0i} = 0 \quad \bar{h}'^\alpha{}_\alpha = 0 \quad \text{manteniendo} \quad \partial^\alpha \bar{h}'_{\alpha\beta} = 0$$

Como en el caso de ondas planas monocromáticas esto agota libertad en $\xi_\alpha(k)$ (la transformada de Fourier de ξ_α) para $k \neq 0$. (Para $k=0$ hay importantes sutilezas que no trataré.)

Efectos de ondas gravitacionales sobre partículas libres.

Volvemos a la onda plana monocromática.

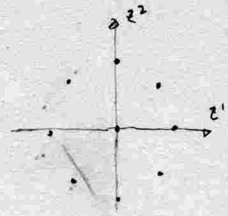
En nuestro calibre Lorentz + transversa + traza cero

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_0 h_{0\alpha} + \partial_0 h_{0\alpha} - \partial_\alpha h_{00}) = 0 \;!$$

Entonces las curvas z^i = constante $z^0 = \tau$ son geodesicas

Una particula inicialmente en reposo permanece en reposo!

- Si construimos un detector de ondas gravitacionales que consiste de una cantidad de masas de prueba flotando libremente en el espacio todos inicialmente en reposo en algún referencial de Lorentz común, entonces el pasaje de una onda gravitacional no parece afectarlos en absoluto.



- Esto suscitó una controversia sobre si existen ondas gravitacionales, y por un breve lapso Einstein se autoconvenció que no son reales.

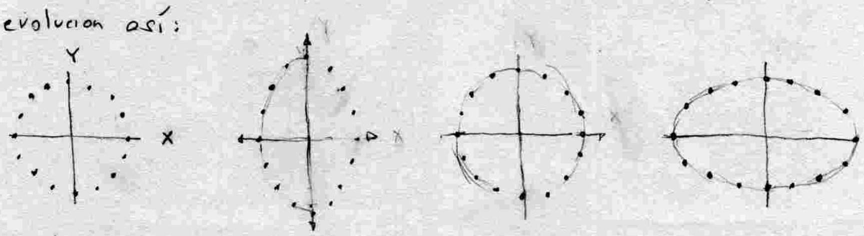
- El problema planteado aquí se resuelve fácilmente si notamos que aunque las partículas permanecen en z^i fijos la distáncia entre ellos no es constante: Consideramos una onda de polarización $+$. Esto quiere decir que

$$h_{\alpha\beta}(z) = a \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cos(\omega(z^0 - z^3))$$ — tomamos parte real para obtener onda física.

La metrica es entonces $$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 + a\cos\omega(z^0 - z^3) & & \\ & & 1 - a\cos\omega(z^0 - z^3) & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Si ponemos una masa libre en el origen y otra a una distancia L_* según la metrica de Minkowski por el eje z^1 ← $z^1 = L$, entonces la distancia física va ser $L = L_* \sqrt{g_{11}} = (1 + \frac{a}{2}\cos\omega z^0) L_*$ — $a \ll 1$

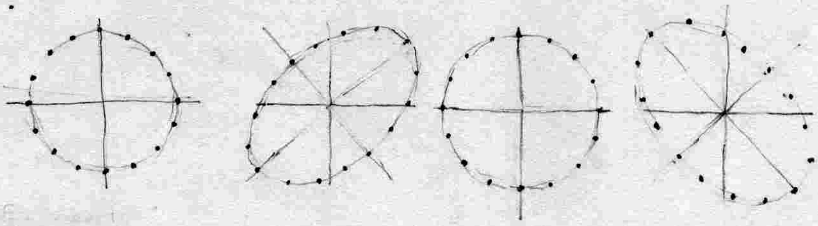
- Si definimos nuevas coordenadas espaciales $X = (1 + \frac{a}{2}\cos\omega z^0) z^1$
$Y = (1 - \frac{a}{2}\cos\omega z^0) z^2$
que miden distancia — es decir $ds^2 = dX^2 + dY^2$ en el plano z^1, z^2 entonces las partículas sí mueven. Un circulo de partículas en el plano X, Y evoluciona así:



Una onda según el eje z con polarización X:

$$h_{\mu\rho}(z) = b \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \cos w(z^0 - z^3)$$

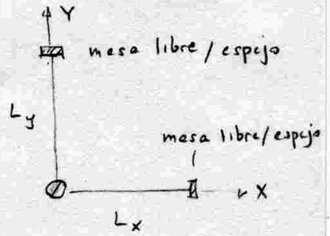
Esto actua sobre un circulo de masas libres en reposo en el plano z^1, z^2 en coordenadas Cartesianas X, Y de la siguiente manera



– es exactamente como polarización + pero girado por 45°

LIGO – Virgo

La detección de ondas gravitacionales funciona de manera no tan distinta que estas masas libres imaginarios



- esencialmente hay 3 mesas en plano sobre la Tierra
- uno en el origen, otro por el eje X, otro por el eje Y.
- No son del todo libres porque están colgados como pendulos. Pero son libres en el plano horizontal que es lo que importa.
- Se arma esencialmente un interferometro de (de luz, no de ondas grav!) Michelson super sofisticado que compara las longitudes L_x y L_y y detectas el efecto de una onda.
- $L_x = L_y \approx 4\,km$ longitud de onda de ondas detectables $\lambda \sim 1000\,km$

$\Rightarrow$ Así interferometro mide, casi, distancias instantaneas ya que L_x, L_y varían poco en tiempo que luz lleva a atravesarlos.

- Por supuesto la onda no va venir perpendicular al plano del interferometro en general, así el analisis es un poco mas complejo que acá.
- Pero ondas típicas detectados $\frac{\delta L}{L} \sim 10^{-21}$. Así $\delta L \approx 4 \times 10^{-18}\,m = 4 \times 10^{-3}\,fm$
- 1 fm ~ radio de protón! Medir δL es tremenda proesa!